

Interest Rate Models - Option Pricing

Σαμόλης Μάριος

19 Ιανουαρίου 2015

Περιεχόμενα

1	Introduction to Stochastic Calculus	3
1.1	Itô Integral	3
1.2	Ito-Doebelin Formula	4
1.3	Ito-Doebelin formula for Multiple Processes	5
1.4	Definitions and Remarks	6
2	Single-Factor Interest Rate Models	8
2.1	Interest Rate Models - Taxonomy	8
2.1.1	Continuous vs Discrete time models	8
2.1.2	Bond Prices, Interest rates vs Yield curve models	8
2.1.3	Single vs Multi-Factor Models	9
2.1.4	No-Arbitrage vs Equilibrium models	9
2.2	Equilibrium Models	10
2.2.1	Pricing Interest Rate Derivatives	10
2.2.2	Merton (1977)	15
2.2.3	Rendleman and Bartter (1980)	16
2.2.4	Vasicek(1977)	16
2.2.5	Cox-Ingersol-Ross (1985)	19
2.3	No-Arbitrage Models	22
2.3.1	Ho-Lee(1986)	23
2.3.2	Hull and White(1990)	24
2.3.3	Black, Derman and Toy's (1987,1990)	26
2.3.4	Black-Karasinski (1991)	27
2.3.5	Interest Rate Trees	28
3	Multifactor Models	33
3.1	Two-Factor Vasicek Model	34
3.2	Two-Factor CIR Model	40
3.3	Mixed Model	42
3.4	Examples of Two-Factor Models	43
3.4.1	Brennan and Schwartz (1979-1982)	43

3.4.2	Richard(1978) and Cox, Ingersoll, Ross(1985)	44
3.4.3	Fong and Vasicek(1991, 1992a, 1992b)	45
3.5	Define risk-adjusted drift rate for two-factor models	46
4	Heath-Jarrow-Morton, Libor Market Model	48
4.1	Heath-Jarrow-Morton Model	48
4.1.1	Forward Rates	49
4.1.2	Dynamics of Forward Rates and Bond Prices	50
4.1.3	No-Arbitrage Condition	52
4.1.4	HJM Under Risk-Neutral Measure	54
4.2	Forward LIBOR Model	55
4.2.1	Forward LIBOR	56
4.2.2	Black Caplet Formula	56
4.2.3	Relation between forward Libor volatility and Zero-Coupon Bond volatility	63
4.2.4	Determination of a full Term-Structure Model	64

Περίληψη

Τις τελευταίες δεκαετίες υπάρχει μια τεράστια ανάπτυξη στην θεωρία μοντελοποίησης της κίνησης των επιτοκίων. Ο στόχος της εργασίας αυτής είναι να γίνει μια παρουσίαση των πιο διαδεδομένων μοντέλων επιτοκίου. Τα μοντέλα τα οποία θα εξετάσουμε, θα τα διακρίνουμε σε 3 κύριες κατηγορίες. Αρχικά θα δούμε τα one-factor interest rate models, σύμφωνα με τα οποία, η κίνηση που ακολουθεί το επιτόκιο, επηρεάζεται από έναν παράγοντα, στη συνέχεια θα αναφέρουμε τα two-factor models, τα οποία θεωρούν ότι υπάρχουν δύο παράγοντες με τους οποίους σχετίζεται η μεταβλητότητα της κίνησης του επιτοκίου, και τέλος θα δούμε δύο μοντέλα που προσδιορίζουν το term structure των επιτοκίων, εξετάζοντας όχι το short term rate, αλλά τα forward rates.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τους επιβλέποντες καθηγητές μου στη συγκεκριμένη διπλωματική εργασία, Κωνσταντίνο Κυριακόπουλο και Ιωάννη Εμμανουήλ, για τις πολύτιμες και ενδιαφέρουσες γνώσεις που μου παρείχαν, διδάσκοντας μια σειρά μαθημάτων στο αντικείμενο της “Στοχαστικής Ανάλυσης στα Χρηματοοικονομικά”, κατά την διάρκεια των σπουδών μου στο μεταπτυχιακό πρόγραμμα “Μαθηματικά της Αγοράς και της Παραγωγής”, του Οικονομικού Πανεπιστημίου Αθηνών. Με την διδασκαλία τους μου έδωσαν τις βάσεις, ώστε να μπορέσω να φέρω εις πέρας την εκπόνηση της διπλωματικής μου εργασίας.

Introduction

Η κατανόηση και μοντελοποίηση της καμπύλης των επιτοκίων (θα αναφερόμαστε σε αυτήν ως term structure of interest rates) αντιπροσωπεύει ένα από τα πιο δύσκολα θέματα στην χρηματοοικονομική έρευνα. Πράγματι, τις τελευταίες δεκαετίες έχει γίνει αντιληπτό στην επιστημονική κοινότητα, ότι η καλύτερη κατανόηση του term structure των επιτοκίων, θα δημιουργήσει πολλά ωφέλη. Από την δημιουργία δικαιωμάτων προαίρεσης (options) πάνω σε ομόλογα, αλλά και σε άλλα υποκείμενα περιουσιακά στοιχεία που συνδέονται άμεσα με το επιτόκιο, έχει δοθεί ιδιαίτερη προσοχή στην ανάπτυξη μοντέλων τα οποία να αποτιμούν και να αντισταθμίζουν τα συσχετιζόμενα με το επιτόκιο περιουσιακά στοιχεία. Παρ' ότι το μοντέλο των Black-Scholes-Merton εδραιώθηκε πολύ γρήγορα ως τό μοντέλο για την αποτίμηση παραγώγων πάνω σε μετοχές, ένας μεγάλος αριθμός προσεγγίσεων συνεχούς χρόνου χρησιμοποιούνται ταυτόχρονα, στο πεδίο των εξαρτώμενων από το επιτόκιο περιουσιακών στοιχείων. Και παρά την ευρεία διάδοση του μοντέλου του Black(1976) για την αποτίμηση παραγώγων πάνω σε τίτλους που σχετίζονται με το επιτόκιο, όπως bond options, caps, swaps κλπ, τα interest rate derivatives παρουσιάζουν μεγάλες διαφορές σχετικά με τα παράγωγα πάνω σε μετοχές, για τις οποίες πρέπει να βρεθεί λύση. Για παράδειγμα, ως σκεφτούμε την περίπτωση ενός ομολόγου: σε αντίθεση με τις μετοχές, η τιμή του ομολόγου στη λήξη είναι σταθερή και γνωστή εκ των προτέρων, συνεπώς η διαδικασία Wiener που χρησιμοποιείται στη μοντελοποίηση της τιμής μιας μετοχής είναι ακατάλληλη. Επιπλέον, οι τιμές των ομολόγων εξαρτώνται από τα επιτόκια, τα οποία εμφανίζουν μια περίπλοκη στοχαστική συμπεριφορά και δεν είναι άμεσα διαπραγματεύσιμα, κάτι που σημαίνει ότι η δυναμική διαδικασία προσδιορισμού τους είναι αρκετά περίπλοκη. Στόχος της συγκεκριμένης διπλωματικής εργασίας είναι να δώσει μια πλήρη περιγραφή των term structure models που είναι πιο διαδεδομένα και των τεχνικών μοντελοποίησης, μέσω των μοντέλων αυτών, της καμπύλης επιτοκίων καθώς και την εφαρμογή τους στην αποτίμηση default-free ομολόγων και interest rate παραγώγων.

Κεφάλαιο 1

Introduction to Stochastic Calculus

Όπως αναφέρθηκε στην εισαγωγή της εργασίας, θα πρέπει, αρχικά, να αναφερθούμε στα μαθηματικά εργαλεία που θεωρούνται δεδομένα από τον συγγραφέα και θα χρησιμοποιηθούν στην μελέτη των μοντέλων της κίνησης των επιτοκίων, τα οποία θα παρουσιαστούν στα επόμενα κεφάλαια της εργασίας.

1.1 Itô Integral

Έστω ένας θετικός αριθμός T , μια κίνηση Brown $W(t)$, $0 \leq t \leq T$ και ένα φιλτράρισμα $\mathcal{F}(t)$, $0 \leq t \leq T$. Έστω, επίσης, $\Delta(t)$ μια προσαρμοσμένη στο φιλτράρισμα, στοχαστική διαδικασία. Τότε ονομάζουμε Itô Integral τη διαδικασία:

$$I(t) = \sum_{j=0}^{k-1} \Delta(t_j)[W(t_{j+1}) - W(t_j)] + \Delta(t_k)[W(t) - W(t_k)] \quad (1.1)$$

η οποία γράφεται

$$I(t) = \int_0^t \Delta(x) dx$$

Theorem 1.1.1. (*Properties of the Integral*) Έστω T θετική σταθερά, $\Delta(\tau)$ μια προσαρμοσμένη στοχαστική διαδικασία και $I(\tau)$ το ολοκλήρωμα Itô όπως ορίστηκε στην (1.1). Τότε ισχύουν τα εξής:

- Για κάθε t , η διαδικασία $I(t)$ είναι $\mathcal{F}(t)$ μετρήσιμη.
- Το ολοκλήρωμα Ito όπως ορίστηκε στην (1.1) είναι ένα *Martingale*

- Ισχύει η εξής ισότητα

$$\mathbb{E}I^2(t) = \mathbb{E} \int_0^t \Delta^2(x) dx \quad (\text{Ito isometry})$$

- Ισχύει η ισότητα

$$[I, I](t) = \int_0^t \Delta(x) dx \quad (\text{quadratic variation})$$

Απόδειξη. Η αποδείξεις των θεωρημάτων που θα συναντήσοψμε σε αυτή την ενότητα παραλείπονται καθώς δεν κρίνεται σκόπιμο να παρουσιαστούν στα πλαίσια αυτής της εργασίας. \square

1.2 Ito-Doebelin Formula

Theorem 1.2.1. (Ito-Doebelin Formula for Brownian Motion) Έστω $f(t,x)$ συνάρτηση για την οποία οι μερικές παράγωγοι υπάρχουν και είναι καλά ορισμένες. Τότε η Ito-Doebelin formula μας λέει ότι ισχύει η σχέση:

$$f(T, W(T)) = f(0, W(0)) + \int_0^T f_t(t, W(t)) dt + \int_0^T f_x(t, W(t)) dW(t) + \frac{1}{2} \int_0^T f_{xx}(t, W(t)) dt$$

Η παραπάνω σχέση γράφεται σε διαφορική μορφή ως εξής:

$$df(t, W(t)) = f_t(t, W(t)) + f_x(t, W(t)) dW(t) + \frac{1}{2} f_{xx}(t, W(t)) dt \quad (1.2)$$

Definition 1.2.2. Έστω $W(t)$, μια κίνηση Brown και $F(t)$ κατάλληλο φιλτράρισμα. Τότε διαδικασία Ito είναι μια στοχαστική διαδικασία της μορφής:

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \Delta(u) du + \int_0^t \Theta(u) du \quad (1.3)$$

Είναι σημαντικό να δούμε την διαφορική μορφή μιας Ito process καθώς αυτή τη μορφή θα χρησιμοποιούμε για ευκολία στους υπολογισμούς μας, στα επόμενα κεφάλαια. Η διαφορική μορφή μιας διαδικασίας Ito είναι η εξής:

$$dX(t) = \Delta(t) dt + \Theta(t) dt \quad (1.4)$$

Επίσης, θα είναι χρήσιμο να δούμε ποιά είναι η τετραγωνική διακύμανση μιας Ito process. Η Quadratic Variation μιας διαδικασίας Ito δίνεται από την σχέση:

$$d[X, X](t) = \Delta^2 dt \quad (1.5)$$

Είδαμε παραπάνω την Ito Formula για μια κίνηση Brown. Τώρα θα δούμε ότι μια αντίστοιχη σχέση ισχύει και για μια Ito Process.

Theorem 1.2.3. (*Ito-Doebelin formula for an Ito Process*) Έστω $X(t), t \geq 0$ μια διαδικασία Ito και $f(t, x)$ μια συνάρτηση, για την οποία υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $f_t(t, x), f_x(t, x), f_{xx}(t, x)$ είναι καλά ορισμένες και συνεχείς. Τότε για κάθε $T \geq 0$

$$df(T, X(t)) = f_t(t, X(t)) dt + f_x(t, X(t)) dX(t) + \frac{1}{2} f_{xx}(t, X(t)) dt \quad (1.6)$$

1.3 Ito-Doebelin formula for Multiple Processes

Definition 1.3.1. (*d-Dimensional Brownian Motion*) Μια πολυδιάστατη κίνηση Brown είναι μια διαδικασία της μορφής $W(t) = (W_1(t), \dots, W_d(t))$ και ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

- (1) Καθε $W_i(t)$ είναι μονοδιάστατη κίνηση Brown
- (2) $\forall i \neq j$ οι διαδικασίες $W_i(t), W_j(t)$ είναι ανεξάρτητες
- (3) Για κάθε $t \geq 0$, το τυχαίο διάνυσμα $W(t)$ είναι $\mathcal{F}(t)$ -μετρήσιμο.
- (4) $\forall 0 \leq t < u$ το διάνυσμα των προσαυξήσεων $W(u) - W(t)$ είναι ανεξάρτητο της $\mathcal{F}(t)$

Theorem 1.3.2. (*2-Dimensional Ito-Doebelin formula*) Έστω συνάρτηση $f(t, x, y)$ τέτοια ώστε οι μερικές παράγωγοι $f_t, f_x, f_y, f_{xx}, f_{yy}, f_{xy}, f_{yx}$ ορίζονται καλά και είναι συνεχείς. Τότε αν $X(t), Y(t)$ διαδικασίες Ito όπως περιγράφηκαν παραπάνω, ισχύει η σχέση:

$$df(t, X, Y) = f_t dt + f_x dX(t) + f_y dY(t) + \frac{1}{2} f_{xx} d[X, X](t) + \frac{1}{2} f_{yy} d[Y, Y](t) + f_{xy} d[X, Y] \quad (1.7)$$

Corollary 1.3.3. (*Ito Product Rule*) Έστω $X(t), Y(t)$ διαδικασίες Ito. Τότε ισχύει η σχέση:

$$d(X(t)Y(t)) = X(t) dY(t) + Y(t) dX(t) + d[X, Y](t) \quad (1.8)$$

Distribution of Ito Integral of a deterministic Integrant

Στο σημείο αυτό, θα δούμε άλλο ένα θεώρημα, το οποίο θα είναι πολύ βασικό στη μετέπειτα ανάλυσή μας.

Theorem. (*Ito integral of a deterministic integrant*) Έστω, $W(s), s \geq 0$, μια κίνηση Brown και $\Delta(s)$ μια μη-τυχαία συνάρτηση του χρόνου. Ορίζουμε, $I(t) = \int_0^t \Delta(s) dW(s)$. Τότε για κάθε, $t \geq 0$ η τυχαία μεταβλητή $I(t)$ είναι ομοιόμορφα κατανομειμένη με μέση τιμή 0 και διακύμανση $\int_0^t \Delta^2(s) ds$.

Ένα πολύ σημαντικό θεώρημα, το οποίο χρησιμοποιείται στην αποτίμηση χρηματοοικονομικών περιουσιακών στοιχείων, όπως ομόλογα, equity securities, interest rate derivatives, κλπ, είναι το θεώρημα των Feynman-Kac, με το οποίο μπορούμε να συνδέσουμε, χρησιμοποιώντας κατάλληλη μεθοδολογία, μια στοχαστική διαφορική εξίσωση, με μια μερική διαφορική εξίσωση, η οποία, τις περισσότερες φορές, είναι πιο εύκολο να λυθεί.

Theorem. (*Feynman-Kac*) Έστω, μια στοχαστική διαφορική εξίσωση, της μορφής:

$$dX(u) = \beta(u, X(u)) du + \gamma(u, X(u)) dW(u)$$

όπου $W(u)$ μια κίνηση Brown κάτω από ένα μέτρο πιθανότητας \mathbb{P} . Έστω, επίσης, μια συνάρτηση $h(\psi)$, η οποία είναι Borel-μετρήσιμη. Για $T > 0$, σταθερό, και $t \in [0, T]$, δοσμένο, ορίζουμε τη συνάρτηση

$$g(t, x) = E^{t,x} h(X(T)).^1$$

Τότε, η $g(t, x)$, ικανοποιεί τη μερική διαφορική εξίσωση

$$g_t(t, x) + \beta(t, x)g_x(t, x) + \frac{1}{2}\gamma^2(t, x)g_{xx}(t, x) = 0$$

με συνοριακή συνθήκη $g(T, x) = h(x), \forall x$

1.4 Definitions and Remarks

Στο σημείο αυτό, όπου έχουμε θυμηθεί μερικές από τις πιο σημαντικές θεωρίες της στοχαστικής ανάλυσης που θα χρησιμοποιήσουμε παρακάτω, θα αναφέρουμε κάποιους συμβολισμούς και παραδοχές που θα μας ακολουθούν καθ' όλη την διάρκεια της εργασίας, εκτός και αν οριστεί με σαφήνεια κάτι διαφορετικό. Όλα τα μοντέλα που θα κατασκευάσουμε θα είναι ορισμένα σε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}(t), P)$ όπου $\mathcal{F}(t)$ ένα φιλτράρισμα επαγόμενο από μια κίνηση Brown $W(t), t \geq 0$.

¹Η $g(t, x)$ μπορεί, για παράδειγμα, να είναι το payoff ενός option.

Για να επικεντρωθούμε αποκλειστικά στον τομέα της αποτίμησης θα αγνοήσουμε τους παράγοντες φορολογία και κόστη μεταβίβασης. Θα ορίζουμε με $B(t, T)$ την, προεξοφλημένη στη στιγμή t , αξία ενός zero-coupon bond που πληρώνει μια χρηματική μονάδα την στιγμή λήξης, T . Έπεται άμεσα, ότι $B(T, T) = 1$. Τη στιγμή t το yield to maturity του ομολόγου, $R(t, T)$ είναι η συνεχώς ανατοκίζόμενη απόδοση του ομολόγου, σύμφωνα με την οποία, η τιμή του ομολόγου τη στιγμή T , είναι ίση με 1

$$B(t, T)e^{(T-t)R(t, T)} = 1 \quad (1.9)$$

ή λύνοντας ως προς το yield:

$$R(t, T) = -\frac{\log(B(t, T))}{T - t} \quad (1.10)$$

Για σταθερό t το σχήμα της $R(t, T)$ όσο το T αυξάνει, καθορίζει το term structure των επιτοκίων

Επίσης, ορίζουμε με $r(t)$ το instantaneous risk-free interest rate, το οποίο αναφέρεται και ως short term interest rate για το οποίο ισχύει η σχέση:

$$r(t) = \lim_{t \rightarrow T} R(t, T) \quad (1.11)$$

Επιπλέον, με τον όρο forward rate ορίζουμε εκείνο το επιτόκιο το οποίο παρατηρούμε τη χρονική στιγμή t για επένδυση κάτω από το risk-free rate τη στιγμή T_1 και διάρκειας έως τη χρονική στιγμή T_2 . Το συμβολίζουμε $f(t, T_1, T_2)$ και ισχύει η σχέση:

$$f(t, T_1, T_2) = \frac{\log(B(t, T_1)) - \log(B(t, T_2))}{T_2 - T_1} \quad (1.12)$$

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον στη μελέτη μας, παρουσιάζει το instantaneous forward rate το οποίο είναι ίσο εξ ορισμού με:

$$f(t, T) \equiv f(t, T, T) \quad (1.13)$$

Κεφάλαιο 2

Single-Factor Interest Rate Models

Για να καταλάβουμε καλύτερα την κατηγοριοποίηση που θα ακολουθήσουμε στο συγκεκριμένο κείμενο, θα ήταν χρήσιμο να αναγνωρίσουμε πρώτα κάποια από τα βασικότερα χαρακτηριστικά και διαφορές που παρουσιάζουν τα interest rate models που θα συναντήσουμε.

2.1 Interest Rate Models - Taxonomy

2.1.1 Continuous vs Discrete time models

Πρέπει να είναι ξεκάθαρο ότι κάτω από την υπόθεση ότι η χρονική υπόσταση λαμβάνεται υπόψιν, τα περισσότερα interest rate models καθορίζονται σε συνεχή χρόνο. Η εξέλιξη της συνεχούς χρόνου στοχαστικής ανάλυσης είχε ως αποτέλεσμα πιο εκλεπτισμένες λύσεις και ακόμα πιο κατανοητές αποδείξεις. Από την άλλη, για την δημιουργία τέτοιων μοντέλων απαιτείται ένα υψηλό επίπεδο μαθηματικού φορμαλισμού.

2.1.2 Bond Prices, Interest rates vs Yield curve models

Τα αρχικά μοντέλα προσδιορισμού του term structure προσπαθούσαν να μοντελοποιήσουν τη δυναμική των τιμών των ομολόγων. Τα αποτελέσματά τους, όμως, δεν επέτρεπαν μια καλύτερη κατανόηση της δομής της καμπύλης, η οποία βρισκόταν κρυμμένη πίσω από τις τιμές των ομολόγων. Πολλά interest rate models μοντελοποιούν τη στοχαστική κίνηση των επιτοκίων και συνηθέστερα του short rate. Η κίνηση αυτού του επιτοκίου, συνήθως ορίζεται να είναι μια

διαδικασία Markov, δηλαδή, η μελλοντική του εξέλιξη να εξαρτάται μόνο από την σημερινή τιμή του και όχι από την έως τώρα πορεία του.

Μία εναλλακτική μορφή μοντέλων προσδιορισμού του term structure των επιτοκίων, είναι εκείνα που προσδιορίζουν τη στοχαστική κίνηση ολόκληρης της καμπύλης επιτοκίων. Αυτά τα μοντέλα είναι τα πιο ελκυστικά, αλλά όπως θα δούμε, η πολυπλοκότητα στη δημιουργία τους είναι πολύ μεγάλη.

2.1.3 Single vs Multi-Factor Models

Με τον όρο factor εννοούμε τον παράγοντα αβεβαιότητας που επηρεάζει την κίνηση των επιτοκίων. Τα one-factor models λειτουργούν κάτω από την υπόθεση ότι ο παράγοντας που προσδίδει αβεβαιότητα στην κίνηση του επιτοκίου είναι μοναδικός. Εμπειρικές μελέτες έχουν δείξει ότι οι παράγοντες που επηρεάζουν την κίνηση των επιτοκίων μπορούν να διακριθούν σε τρεις ανεξάρτητες κατηγορίες:

- Στην πρώτη κατηγορία ανήκουν παράγοντες που μετατοπίζουν την καμπύλη επιτοκίων (για παράδειγμα μια παράλληλη κίνηση όλων των επιτοκίων). Αυτοί είναι υπεύθυνοι για το 80-90 percent της συνολικής διακύμανσης των επιτοκίων.
- Στη δεύτερη κατηγορία ανήκουν οι παράγοντες που στρέφουν την καμπύλη, για παράδειγμα μια κατάσταση όπου τα long rates και τα short term rates κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις.
- Η τρίτη κατηγορία ονομάζεται butterfly για το λόγο του σχήματος που προκαλούν στην καμπύλη, για παράδειγμα όταν τα ενδιάμεσα επιτόκια κινούνται σε αντίθετη κατεύθυνση από εκείνη των short και long term interest rates.

Παρατηρούμε ότι η πρώτη κατηγορία εξηγεί μεγάλο μέρος της αβεβαιότητας που προκαλεί την διακύμανση της καμπύλης, συνεπώς τίθεται το ερώτημα μήπως αρκεί να χρησιμοποιούμε μόνο τα one-factor models για την μοντελοποίηση της κίνησης των επιτοκίων. Πρέπει να γίνει κατανοητό σε αυτό το σημείο ότι δεν είναι αναγκαίο, ολόκληρη η καμπύλη να κινείται παράλληλα, απλά μια πηγή αβεβαιότητας είναι ικανή να εξηγεί κάποιες από τις κινήσεις της καμπύλης. Από την άλλη πλευρά, κάποια securities εμφανίζουν μεγάλη ευαισθησία στο σχήμα της καμπύλης και όχι μόνο στο επίπεδό της.

2.1.4 No-Arbitrage vs Equilibrium models

Τα επονομαζόμενα no-arbitrage models ξεκινούν με υποθέσεις για την στοχαστική συμπεριφορά ενός ή περισσότερων επιτοκίων και για

συγκεκριμένο market price of risk και αποτιμούν τους συσχετιζόμενους με τα επιτόκια τίτλους, υποθέτοντας ότι δεν υπάρχουν ευκαιρίες arbitrage στην αγορά. Σε αντίθεση, τα equilibrium models από μια περιγραφή της οικονομίας, συμπεριλαμβάνοντας τη συνάρτηση χρησιμότητας ενός αντιπροσωπευτικού επενδυτή παράγουν την καμπύλη επιτοκίων και το risk premium ενδογενώς, υποθέτοντας ότι η αγορά βρίσκεται σε ισορροπία. Το μειονέκτημα των equilibrium models που θα εξετάσουμε είναι ότι δεν ταιριάζουν αυτόματα στο σημερινό term structure των επιτοκίων. Τα no-arbitrage μοντέλα, είναι μοντέλα που έχουν σχεδιαστεί για να ταιριάζουν απόλυτα με το σημερινό term structure των επιτοκίων. Η βασική διαφορά, δηλαδή, μεταξύ των equilibrium και των no-arbitrage μοντέλων, έγκειται στο γεγονός ότι τα μεν, λαμβάνουν τη σημερινή καμπύλη επιτοκίων σαν output ενώ στα δε, η σημερινή καμπύλη επιτοκίων είναι input.

2.2 Equilibrium Models

2.2.1 Pricing Interest Rate Derivatives

Σε αυτή την υποενότητα θα δούμε τις δύο βασικές μεθοδολογίες που θα χρησιμοποιήσουμε για την αποτίμηση των interest rate derivatives. Η πρώτη μέθοδος είναι η δημιουργία μιας μερικής διαφορικής εξίσωσης και η δεύτερη μέθοδος είναι η προσέγγιση μέσω ενός martingale. Από το θεώρημα Feynman-Kac προκύπτει ότι οι δυο αυτές μέθοδοι είναι ισοδύναμες.

The partial differential equation approach

Ας υποθέσουμε ότι το short term interest rate είναι ο μοναδικός παράγοντας που καθοδηγεί ολόκληρη την καμπύλη επιτοκίων. Υποθέτουμε ότι η κίνηση του short rate περιγράφεται από τη στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dr(t) = \mu_r(t) dt + \sigma_r(t) dW(t) \quad (2.1)$$

όπου $\mu_r(t) \equiv \mu_r(t, r(t))$ και $\sigma_r(t) \equiv \sigma_r(t, r(t))$ είναι δοσμένες συναρτήσεις οι οποίες καθορίζουν πλήρως την συμπεριφορά του short rate. Ορίζουμε, τώρα, με $V(t)$ την αξία τη στιγμή t , ενός περιουσιακού στοιχείου που σχετίζεται με το επιτόκιο και έχει διάρκεια ως τη λήξη, T . Κάτω από την υπόθεση του single factor model, μόνο το short rate και ο χρόνος ως τη λήξη θα επηρεάζουν την τιμή του περιουσιακού στοιχείου, άρα

$$V(t) \equiv V(t, T, r(t)) \quad (2.2)$$

Από την Ito Formula προκύπτει ότι:

$$dV(t) = V_t dt + V_r(t) dr(t) + \frac{1}{2} V_{rr}(t) dt \quad (2.3)$$

Χρησιμοποιώντας την (2.1) οδηγούμαστε στην σχέση:

$$dV(t) = [V_t + \mu_r(t)V_r + \frac{1}{2}\sigma_r^2 V_{rr}] dt + \sigma_r(t)V_r dW(t) \quad (2.4)$$

Διαιρώντας και τις δυο πλευρές με $V(t)$ η στιγμιαία απόδοση του περιουσιακού στοιχείου είναι:

$$\frac{dV(t)}{V(t)} = \mu_V(t) dt + \sigma_V(t) dW(t) \quad (2.5)$$

,όπου οι $\mu_V(t), \sigma_V(t)$ είναι συναρτήσεις των t, t και $r(t)$.

Τώρα, ας πάρουμε δυο διαφορετικά περιουσιακά στοιχεία V_1, V_2 με maturities T_1, T_2 αντίστοιχα. Δημιουργούμε ένα χαρτοφυλάκιο P με x_1 μονάδες του V_1 και x_2 μονάδες του V_2 δηλαδή:

$$P(t) = x_1 V_1(t) + x_2 V_2(t) \quad (2.6)$$

Τότε ισχύει η σχέση:

$$dP(t) = (x_1 \mu_{V_1}(t) + x_2 \mu_{V_2}(t)) dt + (x_1 \sigma_{V_1}(t) + x_2 \sigma_{V_2}(t)) dW(t) \quad (2.7)$$

Επιλέγουμε κατάλληλα x_1, x_2 ώστε να μηδενίσουμε το volatility του $dP(t)$. Τότε για να αποφύγουμε την ύπαρξη ευκαιριών arbitrage θέλουμε η απόδοση του χαρτοφυλακίου να ισούται με το risk-free rate. Προκύπτει λοιπόν το παρακάτω σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{cases} x_1 \sigma_{V_1}(t) + x_2 \sigma_{V_2}(t) = 0 \\ x_1 (\mu_{V_1}(t) - r(t)) + x_2 (\mu_{V_2}(t) - r(t)) = 0 \end{cases}$$

Το παραπάνω σύστημα έχει μη τετριμμένη λύση αν και μόνο αν

$$\frac{\mu_{V_1}(t) - r(t)}{\sigma_{V_1}(t)} = \frac{\mu_{V_2}(t) - r(t)}{\sigma_{V_2}(t)} \quad (2.8)$$

Αφού αυτή η σχέση πρέπει να ισχύει για κάθε T_1, T_2 προκύπτει το risk premium per unit of risk για όλα τα maturities. Ορίζουμε

$$\frac{\mu_V(t) - r(t)}{\sigma_V(t)} = \lambda(t, r(t)) \quad (2.9)$$

όπου το $\lambda(t, r(t))$ ονομάζεται market risk premium και είναι σταθερό για όλα τα maturities. Μπορούμε, τώρα να εκφράσουμε τη στιγμιαία απόδοση του ομολόγου ως:

$$\mu_V() = r(t) + \lambda(t, r(t))\sigma_V() \quad (2.10)$$

Αντικαθιστώντας τα $\mu_V(), \sigma_V()$ στη σχέση (2.9) όπως προκύπτουν από τη σχέση (2.5) καταλήγουμε στη μερική διαφορική εξίσωση

$$V_t + (\mu_r() - \lambda(t, r(t))\sigma_r())V_r + \frac{1}{2}\sigma_r^2 V_{rr} = rV \quad (2.11)$$

Ο όρος $\mu_r() - \lambda\sigma_r()$ ονομάζεται risk-adjusted drift rate.

Η μερική διαφορική εξίσωση (2.11) θα είναι ένα από τα βασικότερα εργαλεία που θα χρησιμοποιήσουμε για να υπολογίσουμε την αξία των σχετιζόμενων με το επιτόκιο περιουσιακών στοιχείων.

Βέβαια, διαφορετικά one-factor models θα παράγουν όμοιες μερικές διαφορικές εξισώσεις, με διαφορετικά $\mu_r(), \sigma_r()$ καθώς και διαφορετικά περιουσιακά στοιχεία θα παράγουν την ίδια μερική διαφορική εξίσωση, αλλά με διαφορετικές συνοριακές σφηνθήκες. Για παράδειγμα αν κάποιος θεωρήσει το $V(t)$ ως

- zero-coupon bond $B(t, T)$ με χρόνο ως τη λήξη T τότε

$$B_t + (\mu_r() - \lambda()\sigma_r())B_r + \frac{1}{2}\sigma_r^2()B_{rr} = rB \quad (2.12)$$

με συνοριακή συνθήκη $B(T, T) = 1$

- plain vanilla call option πάνω σε ένα zero-coupon bond $B(t, T)$ με maturity date $T_C \leq T$ τότε

$$V_t + (\mu_r() - \lambda()\sigma_r())V_r + \frac{1}{2}\sigma_r^2()V_{rr} = rV \quad (2.13)$$

με συνοριακή συνθήκη $V(T_C) = \max(B(t, T_C) - K, 0)$

- swap με σταθερό επιτόκιο \bar{r} και κυμαινόμενο επιτόκιο r τότε

$$V_t + (\mu_r() - \lambda()\sigma_r())V_r + \frac{1}{2}\sigma_r^2 V_{rr} - r(t)V + (r - \bar{r}) = 0 \quad (2.14)$$

με συνοριακή συνθήκη $V(0) = 0$

- caplet στο επιτόκιο \bar{r} τότε

$$V_t + (\mu_r() - \lambda\sigma_r())V_r + \frac{1}{2}\sigma_r^2()V_{rr} - r(t)V + \min(r, \bar{r}) = 0 \quad (2.15)$$

με συνοριακή συνθήκη $V(T) = \max(r(T) - \bar{r}, 0)$

Proposition. Η λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης όταν $V(t) = B(t, T)$ δίνεται από την σχέση:

$$B(t, T) = E[e^{-\int_t^T r(s) - \frac{1}{2}\lambda^2(s, r(s)) ds - \int_t^T \lambda(s, r(s)) dW(s)}] \quad (2.16)$$

The martingale approach

Η martingale approach για αποτίμηση περιουσιακών στοιχείων κάτω από στοχαστικά επιτόκια είναι βασισμένη στο προτεινόμενο από τους Harrison and Kreps(1979), Artzner and Delbaen(1989) και Heath-Jarrow-Morton(1992) πλαίσιο.

Ένα βασικό σημείο της μεθοδολογίας αυτής είναι η κατάλληλη επιλογή numeraire. Κάθε περιουσιακό στοιχείο μπορεί να επιλεγεί ως μονάδα μέτρησης, αρκεί να έχει αυστηρά θετική τιμή. Αν επιλέξουμε το περιουσιακό στοιχείο $N(t)$ ως numeraire τότε θα συμβολίζουμε με

$$\hat{V}(t) = \frac{V(t)}{N(t)}$$

τη σχετική τιμή του V κάτω από το καινούργιο numeraire N τη χρονική στιγμή t όπου $V(t), N(t)$ είναι οι τιμές τη στιγμή t εκφρασμένες στο αρχικό numeraire. Μια συγκεκριμένη επιλογή numeraire είναι το money market account

$$\beta(t) = e^{\int_0^t r(s) ds}$$

Κάτω από αυτό το numeraire η αξία του V δίνεται

$$\hat{V}(t) = \frac{V(t)}{\beta(t)}$$

Theorem. (*Risk-Neutral Pricing formula*) Ορίζουμε $D(t) = \frac{1}{\beta(t)}$. Τότε γνωρίζουμε ότι κάτω από το risk neutral μέτρο πιθανότητας $\tilde{\mathbb{P}}$, για την τιμή του περιουσιακού στοιχείου V ισχύει ότι

$$V(t) = \tilde{E}[D(T)V(T) \setminus \mathcal{F}(t)] \quad (2.17)$$

ή αλλιώς

$$V(t) = \tilde{E}[V(T)e^{-\int_t^T r(s) ds} \setminus \mathcal{F}(t)] \quad (2.18)$$

Από το παραπάνω θεώρημα, για $V(t) = B(t, T)$ η τιμή ενός zero-coupon bond λήξης T που πληρώνει στη λήξη 1 μονάδα, θα ισούται με

$$B(t, T) = \tilde{E}[e^{-\int_t^T r(s) ds} \setminus \mathcal{F}(t)] \quad (2.19)$$

Παρατηρούμε ότι χρησιμοποιώντας τη risk neutral pricing formula, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η προεξοφλημένη αξία των περιουσιακών στοιχείων είναι martingale κάτω από το risk neutral μέτρο πιθανότητας. Χρησιμοποιώντας, λοιπόν, όσα αναφέρθηκαν μέχρι τώρα, καταλήγουμε στην στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$\frac{dV(t)}{V(t)} = r(t) dt + \sigma_V(t) d\tilde{W}(t) \quad (2.20)$$

Όπου \tilde{W} η κίνηση Brown κάτω από το risk neutral μέτρο πιθανότητας.

From Real to Risk-Neutral World

Στο σημείο αυτό θα δούμε πώς πάμε από τον "real" κόσμο στον risk-neutral κόσμο. Ξεκινάμε από την αρχική κίνηση του risk-free rate

$$dr(t) = \mu_r(t) dt + \sigma_r(t) dW(t)$$

όπου $W(t)$ κίνηση Brown κάτω από το πραγματικό (που βασίζεται σε ιστορικά στοιχεία) μέτρο πιθανότητας P . Για risk-premium $\lambda(t)$, μπορούμε σύμφωνα με το θεώρημα Girsanov να δημιουργήσουμε κατάλληλο μέτρο πιθανότητας, ισοδύναμο με το αρχικό, κάτω από το οποίο η

$$\tilde{W}(t) = W(t) - \int_0^t \lambda(s) \sigma_r(s) ds$$

να είναι κίνηση Brown. Ορίζοντας

$$Z(t) = \exp\left(\int_0^t \lambda dW(t) - \frac{1}{2} \int_0^t \lambda^2 ds\right)$$

χρησιμοποιούμε την $Z = Z(T)$ για να ορίσουμε το νέο μέτρο πιθανότητας $\tilde{P}(t)$ τέτοιο ώστε

$$\tilde{P}(A) = \int_A Z(\omega) dP(\omega), \forall A \in \mathcal{F}$$

Κάτω από το νέο μέτρο πιθανότητας \tilde{P} η στοχαστική διαδικασία $\tilde{W}(t)$ είναι κίνηση Brown. Μπορούμε τώρα να γράψουμε τη στοχαστική διαδικασία που περιγράφει την κίνηση του επιτοκίου ως:

$$dr(t) = (\mu_r(t) - \lambda(t)\sigma_r(t))dt + \sigma_r(t) d\tilde{W}(t)$$

Από εδώ είναι εύκολο να επιβεβαιώσουμε, ότι κάτω από το καινούργιο μέτρο πιθανότητας, η τιμή ενός zero-coupon bond δίνεται από την σχέση (2.19) δηλαδή

$$B(t, T) = \tilde{E}\left[e^{-\int_t^T r(s) ds} \mid \mathcal{F}(t)\right]$$

2.2.2 Merton (1977)

Ο Merton (1973) ήταν ο πρώτος που διατύπωσε μια μοντελοποίηση της στοχαστικής διαδικασίας που περιγράφει την κίνηση του short rate. Κάτω από το φυσικό μέτρο πιθανότητας P των ιστορικών δεδομένων, σύμφωνα με το μοντέλο του Merton η στοχαστική διαδικασία που ακολουθεί η κίνηση του επιτοκίου είναι η

$$dr(t) = \mu_r dt + \sigma_r dW(t) \quad (2.21)$$

όπου μ_r, σ_r σταθερές και $W(t)$ τυπική κίνηση Brown κάτω από το μέτρο πιθανότητας P . Η explicit formula για την τιμή του επιτοκίου προκύπτει απλώς ολοκληρώνοντας την σχέση (2.21) και είναι η

$$r(t) = r(s) + \mu_r t + \sigma_r \int_s^t dW(u), \forall t \geq s$$

Χρησιμοποιώντας την μεθοδολογία της partial differential equation, την οποία αναπτύξαμε σε προηγούμενη παράγραφο, η τιμή ενός zero coupon bond λήξης T , το οποίο πληρώνει 1 μονάδα στη λήξη, θα βρεθεί από τη μερική διαφορική εξίσωση

$$B_t(t, T) + (\mu_r - \lambda\sigma_r)B_r(t, T) + \frac{1}{2}\sigma_r^2 B_{rr}(t, T) - r(t)B(t, T) = 0$$

με συνοριακή συνθήκη $B(T, T) = 1$. Η λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης είναι

$$B(t, T) = e^{-(T-t)r(t) - \frac{(T-t)^2(\mu_r - \lambda\sigma_r)}{2} + \frac{(T-t)^3\sigma_r^2}{6}} \quad (2.22)$$

Το term structure των επιτοκίων, όπως έχουμε δει καθορίζεται από τη σχέση

$$R(t, T) = -\frac{\log(B(t, T))}{T-t} \Rightarrow R(t, T) = r(t) + \frac{(T-t)(\mu_r - \lambda\sigma_r)}{2} + \frac{(T-t)^2\sigma_r^2}{6}$$

Παραγωγίζοντας ως προς T , μπορούμε να πάρουμε την κλίση της καμπύλης

$$R_T(t, T) = \frac{(\mu_r - \lambda\sigma_r)}{2} + \frac{(T-t)\sigma_r^2}{3}$$

Option Pricing

Η αξία τη στιγμή t ενός European call option $C(t)$ με maturity T_C , Strike price K , πάνω σε ένα zero-coupon bond με maturity date $T_B \geq T_C$ μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας την martingale approach που αναλύσαμε σε προηγούμενη παράγραφο ως εξής. Ισχύει

$$C(T) = \max\{B(T_C, T_B), 0\}$$

Τότε έχουμε ότι

$$C(t) = \tilde{E}[e^{-\int_t^{T_C} r(s) ds} C(T) | \mathcal{F}(t)]$$

Συνεπώς χρησιμοποιώντας το θεώρημα Feynman-Kac προκύπτει το ζητούμενο.

$$C(t) = B(t, T_B)N(d_1) - KB(t, T_C)N(d_2) \quad (2.23)$$

όπου,

$$d_1 = \frac{1}{v} \log\left[\frac{B(t, T_B)}{KB(t, T_C)}\right] + \frac{1}{2}v$$

$$d_2 = d_1 - v$$

$$v^2 = \sigma_r^2(T_B - T_C)^2(T_C - t)$$

2.2.3 Rendleman and Bartter (1980)

Το μοντέλο των Rendleman-Bartter υποθέτει ότι το short rate, $r(t)$, ακολουθεί μια γεωμετρική κίνηση Brown με σταθερούς τους συντελεστές διολίσθησης (drift rate) και διάχυσης (diffusion rate).

$$dr(t) = \mu_r r(t) dt + \sigma_r r(t) dW(t) \quad (2.24)$$

Εύκολα, παρατηρούμε ότι οι Rendleman and Bartter υποθέτουν στο μοντέλο τους ότι η κίνηση του επιτοκίου είναι παρόμοια με την κίνηση μιας μετοχής. Κάτι τέτοιο, βεβαίως, δεν ισχύει. Στην πραγματικότητα, έχει παρατηρηθεί ότι τα επιτόκια τείνουν να επιστρέφουν σε ένα, μακροπρόθεσμα, μέσο επίπεδο. Μια τέτοια συμπεριφορά, δεν παρατηρείται στις τιμές των μετοχών. Η ιδιότητα, αυτή, των επιτοκίων ονομάζεται Mean Reversion Property και δεν καταφέρνουν να την απεικονίσουν τα δύο μοντέλα που έχουμε αναφέρει έως τώρα, το Merton model και Rendleman and Bartter model.

2.2.4 Vasicek(1977)

Σύμφωνα με το μοντέλο αυτό, η κίνηση του short term rate ακολουθεί μια Ornstein-Uhlenbeck διαδικασία

$$dr(t) = k(\theta - r(t)) dt + \sigma dW(t) \quad (2.25)$$

όπου k, θ, σ , θετικές σταθερές και $W(t)$ μια τυπική κίνηση Brown. Το μοντέλο αυτό, όπως και το επόμενο μοντέλο που θα συναντήσουμε αντανακλούν την mean reversion property των επιτοκίων. Παρατηρούμε ότι όταν το $r(t)$ ξεπεράσει (αντίθετα, πέσει κάτω από) το επίπεδο θ , τότε ο όρος $(\theta - r(t))$ θα γίνει αρνητικός (αντίστοιχα, θετικός) και μακροπρόθεσμα το

επιτόκιο θα επιστρέφει στο επίπεδο θ με ταχύτητα k . Το βασικό μειωνέκτημα του μοντέλου Vasicek είναι ότι επιτρέπει την ύπαρξη αρνητικών επιτοκίων, κάτι που απέχει από την πραγματικότητα. Θα δούμε στην επόμενη παράγραφο πώς το μοντέλο Cantor-Martin-Girsanov, αποτρέπει την ύπαρξη αρνητικού επιτοκίου και συγχρόνως αποτυπώνει την mean reversion property. Ας δούμε τώρα την explicit formula για την τιμή του επιτοκίου, κάτω από το μοντέλο Vasicek. Θα χρειαστεί να κάνουμε μερικά μαθηματικά σε αυτό το σημείο, για να λύσουμε τη стоχαστική διαφορική εξίσωση (2.25).

$$dr(t) = k(\theta - r(t)) dt + \sigma dW(t)$$

Θέτω $Y(t) = e^{kt}(r(t) - \theta)$ Τότε, παρατηρώ ότι $Y(t) = G(t, r(t))$ όπου $G(t, x) = e^{kt}(x - \theta)$. Τότε από το λήμμα Ito το οποίο έχει αναφερθεί στο προηγούμενο κεφάλαιο, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} dY(t) &= Y_t dt + Y_r dr(t) + \frac{1}{2} Y_{rr} d[r, r](t) \Rightarrow \\ dY(t) &= \sigma e^{kt} dW(t) \end{aligned}$$

Ολοκληρώνοντας προκύπτει

$$Y(t) = Y(0) + \int_0^t \sigma e^{ks} dW(s)$$

Όμως, $Y(t) = e^{kt}(r(t) - \theta)$ συνεπώς καταλήγουμε στο ζητούμενο

$$r(t) = \theta + (r(0) - \theta)e^{-kt} + \sigma e^{-kt} \int_0^t e^{ks} dW(s) \quad (2.26)$$

$\forall t \geq 0$. Για $t \geq s$ η παραπάνω σχέση γίνεται

$$r(t) = \theta + (r(s) - \theta)e^{-k(t-s)} + \sigma \int_s^t e^{-k(u-s)} dW(u)$$

$\forall t \geq s$. Τότε δοσμένης της πληροφορίας που είναι διαθέσιμη τη στιγμή s , το short term rate είναι ομοιόμορφα κατανομημένο

$$r(t)|\mathcal{F}(s) \sim \mathcal{N}[\theta + (r(s) - \theta)e^{-k(t-s)}, \frac{\sigma_r^2}{2k}(1 - e^{-2k(t-s)})]$$

Bond Price

Θα υπολογίσουμε τώρα την αξία ενός zero-coupon bond $B(t, T)$ που πληρώνει 1 μονάδα στη λήξη T , ακολουθώντας πάλι την μέθοδο που αναπτύξαμε στην αρχή του κεφαλαίου. Στο συγκεκριμένο μοντέλο οι

συντελεστές μ_r, σ_r είναι ίσοι με $\mu_r = k(\theta - r(t))$ και $\sigma_r = \sigma$. Από την (2.11) προκύπτει η μερική διαφορική εξίσωση

$$B_t(t, T) + (k(\theta - r(t)) - \lambda_r \sigma) B_r + \frac{1}{2} \sigma_r^2 B_{rr} = r(t) B(t, T)$$

Με συνοριακή συνθήκη, $B(T, T) = 1$. Μπορούμε, επίσης να υπολογίσουμε την αξία του ομολόγου, μέσω της martingale approach λύνοντας τη σχέση

$$B(t, T) = \tilde{E}[e^{-\int_t^T r(s) ds} | \mathcal{F}(t)]$$

χρησιμοποιώντας το θεώρημα Feynman-Kac.

Για σταθερό risk-premium λ καταλήγουμε σε κλειστή μορφή. Προκύπτει ότι η τιμή, τη στιγμή t του ομολόγου δίνεται από την

$$B(t, T) = e^{a(t, T)r(t) + b(t, T)} \quad (2.27)$$

όπου,

$$a(t, T) = \frac{1}{k}(e^{-(T-t)k} - 1)$$

$$b(t, T) = \frac{\sigma_r^2}{4k^3}(1 - e^{-2(T-t)k}) + \frac{1}{k}(\theta - \frac{\lambda\sigma_r}{k} - \frac{\sigma_r^2}{k^2})(1 - e^{-(T-t)k}) - (\theta - \frac{\lambda\sigma_r}{k} - \frac{\sigma_r^2}{k^2})(T-t)$$

Term Structure

Το term structure δίνεται από την (1.10)

$$R(t, T) = -\frac{1}{(T-t)} \left\{ \frac{1}{k}(e^{-(T-t)k} - 1)r(t) + \frac{\sigma_r^2}{4k^3}(1 - e^{-2(T-t)k}) + \frac{1}{k}(\theta - \frac{\lambda\sigma_r}{k} - \frac{\sigma_r^2}{k^2})(1 - e^{-(T-t)k}) - (\theta - \frac{\lambda\sigma_r}{k} - \frac{\sigma_r^2}{2k^2})(T-t) \right\} \quad (2.28)$$

Option Prices

Έστω European call option με strike price K , maturity date T_C πάνω σε ομόλογο λήξης $T_B, T_C \leq T_B$. Τότε η τιμή του option τη στιγμή t , υπολογίζεται είτε σύμφωνα με την σχέση (2.13) είτε με την martingale approach χρησιμοποιώντας το θεώρημα Feynman-Kac και προκύπτει (Jamshidian(1989))

$$C(t) = B(t, T_B)N(d_1) - KB(t, T_C)N(d_2) \quad (2.29)$$

όπου,

$$d_1 = \frac{1}{v} \log\left(\frac{B(t, T_B)}{KB(t, T_C)}\right) + \frac{1}{2}v$$

$$d_2 = d_1 - v$$

$$v^2 = \frac{\sigma_r^2}{2k^3} (1 - e^{-2k(T_C-t)})(1 - e^{-k(T_B - T_C)})^2$$

Θα ήταν χρήσιμο να παρουσιάσουμε τί γίνεται στην περίπτωση που έχουμε ένα option πάνω σε ομόλογο που πληρώνει κουπόνια. Η κεντρική ιδέα που ακολουθούμε σε τέτοιες περιπτώσεις είναι ότι ένα ομόλογο που πληρώνει κουπόνια συμπεριφέρεται σαν άθροισμα zero-coupon bonds. Εμείς θα εξετάσουμε εδώ την περίπτωση ενός European call option πάνω σε ομόλογο το οποίο εμφανίζει n πληρωμές κουπονιών μετά τη λήξη του option T_C . Η προσέγγιση αυτή έγινε από τον Jamshidian το 1989. Ας υποθέσουμε, λοιπόν, ότι το ομόλογο πληρώνει $C_1, C_2 \dots C_n$ τις χρονικές στιγμές $T_1, T_2 \dots T_n$ μετά τη στιγμή T_C . Έστω, επίσης, \dot{r} το επιτόκιο τη χρονική στιγμή T_C κάτω από το οποίο η τιμή του coupon-bearing bond ισούται με το strike price του option (K) και έστω $\dot{B}(T_C, T_i)$ η αξία ενός zero-coupon bond το οποίο πληρώνει 1 χρηματική μονάδα τη στιγμή $T_i (i = 1 \dots n)$ όταν $r(T_C) = \dot{r}$. Τότε τη στιγμή T_C το payoff του option θα είναι

$$\max\left\{\sum_{i=1}^n [C_i B(T_C, T_i)], 0\right\}$$

Παρατηρούμε ότι το option εξασκείται αν και μόνο αν $r \leq \dot{r}$, αφού θέλω η παρούσα αξία των χρηματοροών κάτω από το αρχικό επιτόκιο, να είναι μεγαλύτερη από K (θυμίζουμε ότι όσο αυξάνεται το επιτόκιο τόσο μειώνεται η αξία του ομολόγου). Δηλαδή, κάθε zero-coupon bond $B(T_C, T_i)$ αξίζει περισσότερο από $C_i \dot{B}(T_C, T_i)$ αν και μόνο αν $r \leq \dot{r}$. Έτσι το payoff του option γίνεται

$$\sum_{i=1}^n [C_i \max\{B(T_C, T_i) - \dot{B}(T_C, T_i)\}] \quad (2.30)$$

Η αξία του option δηλαδή, ισούται με το άθροισμα των payoff των n options πάνω στα zero-coupon bonds με strike price $\dot{B}(T_C, T_i)$.

Η μεθοδολογία που ακολουθούμε, είναι η εξής. Αρχικά υπολογίζουμε το \dot{r} , θέτοντας $B(T_C, T_B) = K$, έπειτα υπολογίζουμε την τιμή του κάθε zero-coupon bond $B(T_C, T_i)$ και τέλος υπολογίζουμε το payoff του option χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση.

2.2.5 Cox-Ingersol-Ross (1985)

Οι Cox, Ingersol, Ross ανέπτυξαν ένα equilibrium μοντέλο για την κίνηση του short term rate στο οποίο τα επιτόκια καθορίζονται από την προσφορά και την

ζήτηση, απόμων με λογαριθμική συνάρτηση ωφελιμότητας. Το αποτέλεσμα είναι ένα single-factor model στο οποίο το short rate ακολουθεί την

$$dr(t) = k(\theta - r(t)) dt + \sigma\sqrt{r(t)} dW(t) \quad (2.31)$$

όπου τα k, θ, σ θετικές σταθερές, $W(T)$, τυπική κίνηση Brown και το market risk premium αποδεικνύεται ότι είναι ίσο με $\lambda(t, r(t)) = \lambda\sqrt{r(t)}$ όπου λ , σταθερά.

Παρατηρούμε ότι το μοντέλο αυτό είναι παρόμοιο με εκείνο του Vasicek με μόνη διαφορά, ότι η διακύμανση εδώ, είναι ανάλογη της τετραγωνικής ρίζας του short rate και όχι σταθερή. Λόγω αυτής της διαφοράς, το Cox, Ingersol, Ross model, δεν επιτρέπει αρνητικές τιμές στο επιτόκιο. Ακόμα και στην περίπτωση όπου αγγίζει οριακά το μηδέν, δεν θα γίνει ποτέ αρνητικό.

Με την ίδια μεθοδολογία που εφαρμόσαμε και στο μοντέλο Vasicek λύνοντας τη στοχαστική διαφορική εξίσωση με τον ίδιο ακριβώς τρόπο καταλήγουμε στην σχέση

$$r(t) = \theta + (r(s) - \theta)e^{-k(t-s)} + \sigma_r e^{-k(t-s)} \int_s^t e^{k(u-s)} \sqrt{r(u)} dW(u) \quad (2.32)$$

$\forall t \geq s$. Παρατηρούμε ότι αντίθετα από το μοντέλο του Vasicek στο CIR δεν καταλήγουμε σε κλειστή μορφή για την $r(t)$.

Δοθείσης της πληροφορίας τη στιγμή s ο Feller(1951) έδειξε ότι το short term rate κάτω από το μοντέλο αυτό, ακολουθεί μια χ^2 κατανομή

$$r(t)|\mathcal{F}(s) \sim \chi(2cr(t), 2q + 2, 2u)$$

με $2q + 2$ βαθμούς ελευθερίας και μη κεντρική παράμετρο $2u$ όπου,

$$c = \frac{2k}{\sigma_r^2(1 - e^{-k(t-s)})}$$

$$u = cr(s)e^{-k(t-s)}$$

$$q = \frac{2k\theta}{\sigma_r^2} - 1$$

Bond Price

Ακολουθώντας την ίδια μεθοδολογία με τα προηγούμενα μοντέλα, για να υπολογίσουμε την τιμή ενός zero-coupon bond λήξης το οποίο πληρώνει 1 μονάδα στη λήξη T , μπορούμε να διαλέξουμε έναν εκ των δύο τρόπων που έχουν αναφερθεί.

Η μερική διαφορική εξίσωση που πρέπει να λυθεί είναι η

$$B_t + (k(\theta - r(t)) - \lambda\sigma_r)B_r + \frac{1}{2}\sigma_r^2 r(t)B_{rr} = r(t)B(t, T) \quad (2.33)$$

με συνοριακή συνθήκη, $B(T, T) = 1$. Επίσης, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την δευτερη προσέγγιση και να προσδιορίσουμε την τιμή του ομολόγου από την

$$B(t, T) = \tilde{E}[e^{-\int_t^T r(s) ds} | \mathcal{F}(t)] \quad (2.34)$$

Η λύση που προκύπτει από τις παραπάνω μεθόδους είναι η

$$B(t, T) = a(t, T)e^{-b(t, T)r(t)} \quad (2.35)$$

όπου,

$$a(t, T) = \left[\frac{2\gamma e^{(\tilde{k}+\gamma)\frac{T}{2}}}{(\tilde{k} + \gamma)(e^{\gamma T} - 1) + 2\gamma} \right]^{(\tilde{k}+\gamma)\frac{R(t, \infty)}{\sigma_r^2}}$$

$$b(t, T) = \frac{2e^{\gamma T} - 1}{(\tilde{k} + \gamma)(e^{\gamma T} - 1) + 2\gamma}$$

$$\gamma = \sqrt{\tilde{k}^2 + 2\sigma_r^2}$$

$$\tilde{k} = k + \lambda\sigma_r$$

Term Structure

Το term structure προσδιορίζεται από τη σχέση (1.10) και είναι

$$R(t, T) = \frac{b(t, T)}{T - t}r(t) - \frac{k + \lambda\sigma_r + \gamma \log a(t, T)}{2k\theta} \frac{R(t, \infty)}{T - t} \quad (2.36)$$

και

$$R(t, \infty) = \frac{2k\theta}{k + \lambda\sigma_r + \gamma}$$

Παρατηρούμε ότι το $R(t, T)$ επηρεάζεται από το $r(t)$ γραμμικά, και άρα το short term rate $r(t)$ καθορίζει το επίπεδο της καμπύλης και όχι το σχήμα της.

Option Prices

Οι Cox, Ingersol, Ross ανέπτυξαν φόρμουλες για την αποτίμηση European call και put options με strike price K , maturity date T_C πάνω σε zero-coupon bonds που πληρώνουν 1 μονάδα στη λήξη $T_B \geq T_C$. Για να βρούμε την αξία του option μπορούμε πάλι να ακολουθήσουμε μία από της δύο μεθόδους που έχουμε αναφέρει. Αν επιλέξουμε την martingale approach

τότε παίρνοντας ότι το payoff του option στη λήξη είναι (για call option) $\max\{B(T_C, T_B) - K, 0\}$ σύμφωνα με τη Risk-Neutral pricing formula

$$C(t) = \tilde{E}[e^{-\int_t^T r(s) ds} C(T) | \mathcal{F}(t)]$$

Τότε χρησιμοποιώντας για άλλη μια φορά το θεώρημα των Feynman-Kac καταλήγουμε στο ζητούμενο.

$$\begin{aligned} C(t) = & B(t, T_B) \chi[d_1, \frac{4k\theta}{\sigma_r^2}, \frac{\phi^2 r(t) e^{\gamma T_C}}{\frac{d_1}{\hat{r}}}] \\ & - KB(t, T_C) \chi[d_2, \frac{4k\theta}{\sigma_r^2}, \frac{\phi^2 r(t) e^{\gamma T_C}}{\frac{d_2}{\hat{r}}}] \end{aligned} \quad (2.37)$$

όπου,

$$d_1 = 2\hat{r}(\phi + \psi + b(t, T_B - T_C))$$

$$d_2 = 2\hat{r}(\phi + \psi)$$

$$\phi = \frac{2\gamma}{\sigma_r^2(e^{\gamma T_C} - 1)}$$

$$\psi = \frac{\tilde{k} + \gamma}{\sigma_r^2}$$

και

$$\hat{r} = \frac{\ln[\frac{a(t, T_B - T_C)}{K}]}{b(t, T_B - T_C)}$$

Παρατηρούμε ότι εδώ η φόρμουλα που δίνει την τιμή του option είναι κάπως περίπλοκη. Αυτό οφείλεται στην χ^2 κατανομή του short rate.

2.3 No-Arbitrage Models

Το βασικό μειονέκτημα των equilibrium μοντέλων που παρουσιάσαμε στην προηγούμενη ενότητα, είναι ότι δεν ταιριάζουν αυτόματα με το σημερινό term structure των επιτοκίων. Επιλέγοντας, βέβαια, τις παραμέτρους κατάλληλα, μπορούν να διαμορφωθούν, ώστε να παρουσιάζουν μια καλή προσέγγιση προσαρμογής με τη σημερινή καμπύλη επιτοκίων. Όμως η προσέγγιση αυτή δεν είναι ποτέ τόσο ακριβής.

Για το λόγο αυτό, το 1990, οι Hull and White εισήγαγαν μια νέα κλάση μοντέλων, η οποία είναι συνεπής με την υπάρχουσα καμπύλη επιτοκίων. Η βασική διαφορά μεταξύ των equilibrium και των no-arbitrage μοντέλων, είναι ότι στα μεν, η σημερινή καμπύλη επιτοκίων προκύπτει σαν output ενώ στα δε,

είναι ένα input. Η πιο γενική έκφραση του μοντέλου που συνέστησαν οι Hull and White είναι η

$$dr(t) = (\theta(t) - k(t)r(t)) dt + \sigma(t)r^\beta(t) dW(t) \quad (2.38)$$

με ένα εξωγενώς καθορισμένο risk premium $\lambda(t, r(t)) = \lambda r^\gamma$.

Οι συναρτήσεις $\theta(t)$, $k(t)$, $\sigma(t)$ είναι συναρτήσεις του χρόνου και μπορούν να χρησιμοποιηθούν ώστε να ταιριάζει απόλυτα το μοντέλο με τις τρέχουσες τιμές. Αξίζει να παραθέσουμε μια δήλωση των Hull and White σχετικά με τη σύνεση που, κατά τη γνώμη τους, χρειάζεται όταν χρησιμοποιούνται οι συνερτήσεις αυτές

”It is always dangerous to use time-varying model parameters so that the initial volatility curve is fitted exactly. Using all the degrees of freedom in a model to fit the volatility exactly constitutes an over-parametrization of the model. It is our option tha there should bo no more than one time-varying parameter used in Markov models of the term-structure evolution, and this should be used to fit the initial term structure.”

Αυτό εξηγεί γιατί, στην πραγματικότητα, οι όροι $k(t)$, $\sigma(t)$ του μοντέλου (2.38) θεωρούνται σταθεροί και ο $\theta(t)$ είναι συνάρτηση του χρόνου.

2.3.1 Ho-Lee(1986)

Οι Ho and Lee παρουσίασαν το πρώτο no arbitrage μοντέλο για την κίνηση του επιτοκίου σε μορφή δυαδικού δένδρου από τιμές ομολόγων, με δυο παραμέτρους: την τυπική απόκλιση και το market price of risk του short rate. Έχει δειχθεί ότι σε συνεχή χρόνο, το μοντέλο που παρουσίασαν οι Ho-Lee έχει τη μορφή

$$dr(t) = \theta(t) dt + \sigma dW(t) \quad (2.39)$$

όπου σ η στιγμιαία τυπική απόκλιση του short rate είναι σταθερή και $\theta(t)$ μια συνάρτηση του χρόνου η οποία επιλέγεται για να διασφαλιστεί ότι το μοντέλο ταιριάζει στην αρχική καμπύλη επιτοκίου.

Η παράμετρος $\theta(t)$ μπορεί να υπολογιστεί αναλυτικά, χρησιμοποιώντας το αρχικό term structure

$$\theta(t) = F_t(0, t) + \sigma^2 t$$

όπου $F(0, t)$ το στιγμιαίο forward rate για maturity t όπως το παρατηρούμε τη στιγμή 0.

Bond Prices

Η τιμή ενός zero-coupon bond που πληρώνει 1 μονάδα στη λήξη T δίνεται από τη σχέση

$$B(t, T) = A(t, T)e^{-r(t)(T-t)} \quad (2.40)$$

όπου,

$$\ln A(t, T) = \ln\left[\frac{B(0, T)}{B(0, t)}\right] + (T - t)F(0, t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t(T - t)^2 \quad (2.41)$$

Σε αυτές τις εξισώσεις ο χρόνος μηδέν είναι σήμερα. Οι χρόνοι t, T είναι, γενικά, μελλοντικές στιγμές, όπου $t \leq T$. Παρατηρούμε, δηλαδή, ότι αυτές οι εξισώσεις καθορίζουν την τιμή ενός zero-coupon bond σε μελλοντική στιγμή t με βάση τις τιμές των ομολόγων σήμερα, και του short rate τη στιγμή t .

2.3.2 Hull and White(1990)

Το 1990, οι Hull and White ανακάλυψαν μια επέκταση του μοντέλου του Vasicek η οποία παρείχε μια ακριβής προσέγγιση της αρχικής καμπύλης. Αυτός είναι ο λόγος που σε πολλά συγγράμματα, το συγκεκριμένο μοντέλο αναφέρεται ως Extended Vasicek model.

Η стоχαστική διαφορική εξίσωση που περιγράφει την κίνηση του short rate επιτοκίου $r(t)$ σύμφωνα με το μοντέλο αυτό είναι η

$$dr(t) = k\left[\frac{\theta(t)}{k} - r(t)\right] dt + \sigma dW(t) \quad (2.42)$$

όπου τα k, σ είναι θετικές σταθερές.

Παρατηρούμε ότι το μοντέλο αυτό, μπορεί να θεωρηθεί ως ένα μοντέλο Vasicek με επίπεδο επαναφοράς εξαρτώμενο από το χρόνο. (τη χρονική στιγμή t , το short term rate επαναφέρεται στο επίπεδο $\frac{\theta(t)}{k}$ με ταχύτητα k)

Η παράμετρος $\theta(t)$ μπορεί και εδώ να υπολογιστεί με βάση την αρχική καμπύλη επιτοκίων

$$\theta(t) = F_t(0, t) + kF(0, t) + \frac{\sigma^2}{2k}(1 - e^{-2kt})$$

Ο τελευταίος όρος είναι συνήθως πολύ μικρός. Αν τον αγνοήσουμε, παρατηρούμε ότι ο συντελεστής διολίσθησης της διαδικασίας του r τη χρονική στιγμή t , είναι $F_t(0, t) + k(F(0, t) - r(t))$. Από εδώ βλέπουμε, ότι το r ακολουθεί κατά μέσο όρο την αρχική καμπύλη. Όταν ξεφεύγει από αυτή, επιστρέφει πίσω με ρυθμό k .

Bond Prices

Η τιμή τη στιγμή t ενός zero-coupon bond που πληρώνει 1 μονάδα στη λήξη T , υπολογίζεται και εδώ με τους τρόπους που έχουν αναφερθεί και ισούται με

$$B(t, T) = e^{a(t, T)r(t) + b(t, T)} \quad (2.43)$$

όπου,

$$\begin{aligned} a(t, T) &= \frac{1}{k}(e^{-(T-t)k} - 1) \\ b(t, T) &= \ln\left[\frac{B(0, T)}{B(0, t)}\right] - B(t, T)\frac{\theta \ln(B(0, t))}{\theta t} \\ &\quad - \frac{1}{4k^3}\sigma^2(e^{-kT} - e^{-kt})(e^{2kt} - 1) \end{aligned}$$

Option Prices

Η τιμή ενός European call option gr με strike price K , λήξη T_C , πάνω σε ομόλογο μηδενικού κουπονιού που πληρώνει 1 μονάδα στη λήξη $T_B \geq T_C$, προκύπτει με την γνωστή μεθοδολογία

$$C(t) = B(0, T_B)\mathcal{N}(h) - KB(0, T_C)\mathcal{N}(h - \sigma_B) \quad (2.44)$$

όπου,

$$h = \frac{1}{\sigma_B} \ln\left[\frac{B(0, T_B)}{KB(0, T_C)}\right] + \frac{\sigma_B}{2}$$

και

$$\sigma_B = \frac{\sigma_r}{k}(1 - e^{-k(T_B - T_C)})\sqrt{\frac{1 - e^{-2kT}}{2k}}$$

Τα European options πάνω σε coupon-bearing bonds μπορούν να αποτιμηθούν με τον ίδιο τρόπο όπως δείξαμε στην περίπτωση του μοντέλου Vasicek. Μπορούμε, εύκολα, να δούμε ότι οι παραπάνω εξισώσεις για ομόλογο που πληρώνει L_B στη λήξη T_B γίνονται

$$C(t) = L_B B(0, T_B)\mathcal{N}(h) - KB(0, T_C)\mathcal{N}(h - \sigma_B)$$

$$P(t) = KB(0, T_C)\mathcal{N}(-h + \sigma_B) - L_B B(0, T_B)\mathcal{N}(-h)$$

όπου h, σ_B όπως πριν.

Μια μέθοδος για αναπαράσταση του Hull and White model είναι κατασκευάζοντας ένα τριωνυμικό δένδρο, το οποίο θα δούμε αργότερα σε αυτό το κεφάλαιο. Αυτή η μέθοδος είναι χρήσιμη, όταν εξετάζουμε American options ή άλλα παράγωγα, που δεν μπορούν να αποτιμηθούν με αναλυτικές μεθόδους.

Critiques

Όπως αναφέραμε και παραπάνω, εκτός από τις αναλυτικές εξισώσεις που είδαμε, οι Hull and White (1990) ανέπτυξαν μια κομψή μεθοδολογία κατασκευής τριωνυμικού δένδρου, η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να κάνουμε calibration του μοντέλου, στα δεδομένα της αγοράς. Παρ' όλα, όμως τα θετικά χαρακτηριστικά του, το μοντέλο Hull and White (extended Vasicek) συνεχίζει να έχει κάποια βασικά προβλήματα.

- συνεχίζει να επιτρέπει την ύπαρξη αρνητικών επιτοκίων
- Ένα ακριβές, μέρα προς μέρα, fitting στο term structure παράγει μια ακραία ασταθή συμπεριφορά, ιδίως για την παράμετρο θ_t . Αυτό δίνει μια εξήγηση, γιατί το μοντέλο συχνά εφαρμόζεται για σταθερή mean reversion ταχύτητα.

2.3.3 Black, Derman and Toy's (1987,1990)

Οι Fisher Black, Emanuel Derman, William Toy ανέπτυξαν το (1990), ένα one-factor (no-arbitrage) model για τον προσδιορισμό της κίνησης του short term interest rate. Το μοντέλο χρησιμοποιεί την τρέχουσα δομή των αποδόσεων των zero-coupon Treasury bonds για διάφορες ημερομηνίες λήξης, και τα εκτιμώμενα volatilities τους, ώστε να κατασκευάσει ένα διωνυμικό δένδρο από πιθανές μελλοντικές τιμές των short rates. Αυτό το δένδρο μπορεί να χρησιμοποιηθεί αργότερα, για την αποτίμηση τίτλων, "ευέσθητων στο επιτόκιο.

Οι υποθέσεις που γίνονται ώστε να ισχύει το μοντέλο είναι οι εξής:

- Οι μεταβολές στις αποδόσεις όλων των ομολόγων, συσχετίζονται.
- Οι αναμενόμενες αποδόσεις, όλων των χρεογράφων, για μία περίοδο, είναι ίσες
- Τα short rates είναι λογαριθμοκανονικά κατανεμειμένα
- Δεν υπάρχει φορολογία και κόστη συναλλαγών

Το μοντέλο αυτό, όπως και τα προηγούμενα, αρχικά δημιουργήθηκε, ώστε αλγοριθμικά, να προσομοιάζει την κίνηση του short rate επιτοκίου, σε ένα διακριτού χρόνου πλαίσιο, χρησιμοποιώντας την κατασκευή ενός διωνυμικού δένδρου.

Έχει δειχθεί, όμως, ότι στο συνεχή χρόνο, παίρνοντας το όριο του χρονικού βήματος στο μηδέν, η στοχαστική διαδικασία η οποία ανταποκρίνεται στο μοντέλο είναι η:

$$d\ln(r(t)) = [\theta(t) - \alpha(t)\ln(r(t))] dt + \sigma(t) dW(t) \quad (2.45)$$

όπου

$$\alpha(t) = -\frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)}$$

Το BDT model ενσωματώνει δύο ανεξάρητες συναρτήσεις του χρόνου, η οποίες επιλέγονται έτσι ώστε, το μοντέλο να ταιριάζει στη σημερινή καμπύλη επιτοκίων.

Πλεονέκτημα σε σχέση με τα μοντέλα Ho-Lee, Hull and White είναι ότι εδώ το μοντέλο αυτό δεν επιτρέπει αρνητικά επιτόκια. Η διαδικασία Wiener μπορεί να προκαλέσει το $\ln(r(t))$ να γίνει αρνητικό, αλλά το ίδιο το r θα είναι πάντα θετικό.

Ένα μειονέκτημα του μοντέλου αυτού, είναι ότι δεν υπάρχουν οποιεσδήποτε αναλυτικές ιδιότητες. Ένα ακόμα πιο σοβαρό μειονέκτημα, είναι ότι με τον τρόπο που κατασκευάζεται το δένδρο, επιβάλλει μια σχέση μεταξύ του volatility ($\sigma(t)$) και της παραμέτρου επαναφοράς ($\alpha(t)$).

Στην πράξη, η πιο χρήσιμη μορφή του μοντέλου BDT είναι όταν το $\sigma(t)$ είναι σταθερό. Τότε $\alpha(t) = 0$ και

$$d\ln(r(t)) = \theta(t) dt + \sigma dW(t) \quad (2.46)$$

Η συγκεκριμένη μορφή, μπορεί να χαρακτηριστεί σαν μια lognormal μορφή του μοντέλου Ho-Lee η οποία λύνει το πρόβλημα των αρνητικών επιτοκίων.

2.3.4 Black-Karasinski (1991)

Οι Black, Karasinski πρότειναν το 1991, μια επέκταση του μοντέλου BDT στην οποία το reversion rate και το volatility είναι ανεξάρητα.

$$d\ln(r(t)) = [\theta(t) - \alpha(t)r(t)] dt + \sigma(t) dW(t) \quad (2.47)$$

Στην πράξη, συχνά τα $\alpha(t)$, $\sigma(t)$ θεωρούνται σταθερά και τότε η παραπάνω σχέση γίνεται

$$d\ln(r(t)) = [\theta(t) - \alpha r(t)] dt + \sigma dW(t)$$

Όπως σε όλα τα μοντέλα που έχουμε εξετάσει μέχρι τώρα, η παράμετρος $\theta(t)$ επιλέγεται ώστε να παρέχει ένα ακριβές ταιρίασμα του μοντέλου με την αρχική καμπύλη επιτοκίων.

2.3.5 Interest Rate Trees

Ένα δένδρο επιτοκίου, είναι μια διακριτού-χρόνου απεικόνιση της στοχαστικής διαδικασίας που ακολουθεί το short rate. Αν το χρονικό βήμα (time step) , στο δένδρο, είναι Δt , τα επιτόκια στο δένδρο, θα είναι επιτόκια Δt περιόδων, με συνεχή κεφαλαιοποίηση. Η συνήθης υπόθεση, όταν κατασκευάζεται ένα δένδρο επιτοκίου, είναι ότι το επιτόκιο R , Δt -περιόδου, ακολουθεί την ίδια στοχαστική διαδικασία που ακολουθεί και το instantaneous short-rate r στο αντίστοιχο, συνεχούς χρόνου, μοντέλο. Η κύρια διαφορά, μεταξύ ενός δένδρου επιτοκίου, και ενός δένδρου για την τιμή μιας μετοχής είναι ο τρόπος με τον οποίο γίνεται η προεξόφληση. Σε ένα δένδρο για την τιμή μιας μετοχής, ο προεξοφλητικός παράγοντας θεωρείται ότι είναι ο ίδιος σε κάθε κόμβο (ή, είναι συνάρτηση του χρόνου). Σε ένα δένδρο επιτοκίου, ο προεξοφλητικός παράγοντας ποικίλει από κόμβο σε κόμβο. Σε πολλές περιπτώσεις, αποδεικνύεται πιο βολικό, να χρησιμοποιείται τριωνυμικό έναντι διωνυμικού δένδρου, για απεικόνιση της κίνησης του επιτοκίου. Το κύριο πλεονέκτημα του τριωνυμικού δένδρου, είναι ότι παρέχει έναν επιπλέον βαθμό ελευθερίας, κάνοντας έτσι πιο εύκολη την ενσωμάτωση ιδιοτήτων της διαδικασίας της κίνησης των επιτοκίων, όπως η mean reversion property.

A General Tree-Building Procedure

Οι Hull and White πρότειναν μια αξιόπιστη διαδικασία, δύο σταδίων, κατασκευής τριωνυμικών δένδρων, με την οποία μπορούν να αναπαρασταθούν πολλά one-factor models. Σε αυτή την ενότητα, θα δούμε πώς μπορεί να χρησιμοποιηθεί η μεθοδολογία αυτή για να αναπαρασταθεί η μοντελοποίηση των Hull and White (2.42)

First Stage

Το μοντέλο των Hull and White για το instantaneous short rate μπορεί να γραφεί

$$dr(t) = [\theta(t) - kr(t)] + \sigma dW(t) \quad (2.48)$$

Υποθέτουμε ότι το χρονικό βήμα στο δένδρο είναι σταθερό και ίσο με Δt . Επιπλέον, υποθέτουμε ότι το Δt -επιτόκιο R ακολουθεί την ίδια διαδικασία με το short rate r .

$$dR(t) = [\theta(t) - kr(t)] + \sigma dW(t)$$

Το πρώτο στάδιο είναι να δημιουργήσουμε ένα δένδρο για μια μεταβλητή \hat{R} η

οποία είναι αρχικά ίση με μηδέν και ακολουθεί τη διαδικασία

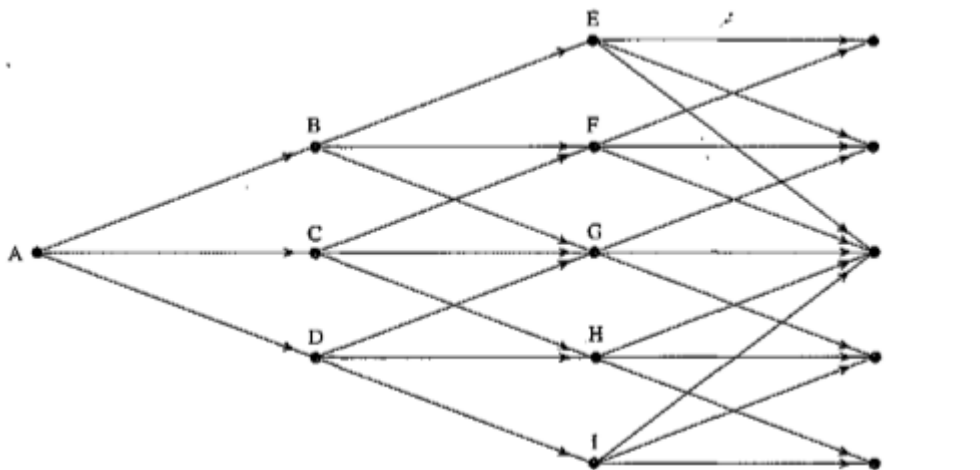
$$d\hat{R} = -k\hat{R} + \sigma dW(t) \quad (2.49)$$

Η διαδικασία αυτή είναι συμμετρική ως προς $\hat{R} = 0$. Η μεταβλητή $\hat{R}(t + \Delta t) - \hat{R}(t)$ είναι ομοιόμορφα κατανομημένη. Η αναμενόμενη τιμή της $\hat{R}(t + \Delta t) - \hat{R}(t)$ είναι $-k\hat{R}(t)\Delta t$ και η διακύμασή της είναι $\sigma^2\Delta t$. Η μεταβολή στα επιτόκια πάνω στο δένδρο θεωρείται

$$\Delta R = \sigma\sqrt{3\Delta t}$$

Αποδεικνύεται ότι η παραπάνω επιλογή του ΔR είναι μια καλή επιλογή από την σκοπιά της ελαχιστοποίησης του σφάλματος.

Στόχος, του πρώτου σταδίου, είναι να δημιουργηθεί ένα δένδρο για το \hat{R} , παρόμοιο με αυτό της παρακάτω εικόνας.



Node:	A	B	C	D	E	F	G	H	I
$R(\%)$	0.000	1.732	0.000	-1.732	3.464	1.732	0.000	-1.732	-3.464
p_u	0.1667	0.1217	0.1667	0.2217	0.8867	0.1217	0.1667	0.2217	0.0867
p_m	0.6666	0.6566	0.6666	0.6566	0.0266	0.6566	0.6666	0.6566	0.0266
p_d	0.1667	0.2217	0.1667	0.1217	0.0867	0.2217	0.1667	0.1217	0.8867

Παρατηρούμε ότι ο τρόπος διακλάδωσης δε είναι ίδιος σε κάθε κόμβο. Πρέπει να βρούμε ποιο είναι εκείνο το βήμα, στο οποίο φεύγουμε από το standard

branching και ακολουθούμε non-standard branching. Αφού γίνει αυτό, πρέπει να υπολογίσουμε τις πιθανότητες μετάβασης από τον ένα κόμβο στον άλλο. Ορίζουμε ως (i, j) τον κόμβο, όπου $t = i\Delta t$ και $\hat{R} = j\Delta R$ όπου $i \geq 0$ και $j \in \mathcal{Z}$. Ορίζουμε j_{max} να είναι ο ακέραιος j όπου αλλάζουμε τη διακλάδωση του δένδρου, από standard branching σε non-standard branching. Οι Hull-White έδειξαν ότι οι πιθανότητες μετάβασης είναι πάντα θετικές αν επιλέξουμε το j_{max} έτσι ώστε να ισχύει $j_{max} = \lceil \frac{0.184}{k\Delta t} \rceil + 1$, δηλαδή να είναι ο μικρότερος ακέραιος που είναι μεγαλύτερος από $\frac{0.184}{k\Delta t}$. Ορίζουμε τις πιθανότητες μετάβασης, p_u, p_m, p_d ως τις πιθανότητες της υψηλότερης, μεσαίας και χαμηλότερης διακλάδωσης που ξεκινάει από κάθε κόμβο, αντίστοιχα. Οι πιθανότητες αυτές επιλέγονται ώστε να ταιριάζουν με την αναμενόμενη μεταβολή και τη διακύμανση του \hat{R} για το επόμενο χρονικό διάστημα Δt . Αποδεικνύεται ότι οι εξισώσεις που δίνουν τις πιθανότητες μετάβασης για κάθε τύπο διακλάδωσης είναι οι εξής:

•

$$p_u = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}(k^2 j^2 \Delta t^2 - k j t)$$

$$p_m = \frac{2}{3} - k^2 j^2 \Delta t^2$$

$$p_d = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}(k^2 j^2 \Delta t^2 + k j \Delta t)$$

•

$$p_u = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}(k^2 j^2 \Delta t^2 + a j \Delta t)$$

$$p_m = -\frac{1}{3} - k^2 j^2 \Delta t^2 - 2k j \Delta t$$

$$p_d = \frac{7}{6} - \frac{1}{2}(k^2 j^2 \Delta t^2 + 3k j \Delta t)$$

•

$$p_u = \frac{7}{6} + \frac{1}{2}(k^2 j^2 \Delta t^2 - 3k j \Delta t)$$

$$p_m = -\frac{1}{3} - k^2 j^2 \Delta t^2 + 2k j \Delta t$$

$$p_d = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}(k^2 j^2 \Delta t^2 - k j \Delta t)$$

Για διακλαδώσεις της μορφής



αντίστοιχα.

Μια παρατήρηση που αξίζει να σημειωθεί εδώ, είναι ότι οι πιθανότητες μετάβασης από κόμβο σε κόμβο δεν παραμένουν ίδιες, αντίθετα, εξαρτώνται από τον κόμβο στον οποίο βρισκόμαστε.

Second Stage

Στο δεύτερο στάδιο, πρέπει να μετατρέψουμε το δένδρο που κατασκευάσαμε για το \hat{R} , σε δένδρο που να απεικονίζει το επιτόκιο R . Η διαδικασία που ακολουθούμε είναι η εξής.

Έστω $\omega(t)$ τέτοιο ώστε

$$\omega(t) = R(t) - \hat{R}(t) \quad (2.50)$$

Τότε από (2.48) και (2.49) προκύπτει ότι

$$d\omega(t) = [\theta(t) + k(\hat{R} - R)] dt \quad (2.51)$$

ή αλλιώς

$$d\omega = [\theta(t) - k\omega(t)] dt \quad (2.52)$$

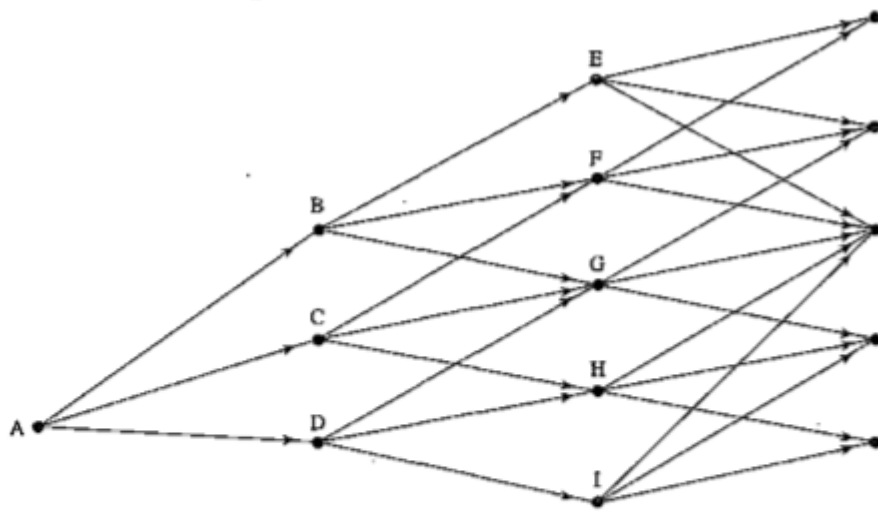
Λύνοντας τη стоχαστική διαφορική εξίσωση (2.52) προκύπτει ότι

$$\omega(t) = e^{-kt} [R(0) + \int_0^t e^{ks} \theta(s) ds] \quad (2.53)$$

Αν, τώρα, δημιουργήσω ένα νέο δένδρο όπου σε κάθε κόμβο $\hat{R}(t)$ προσθέσω την ποσότητα $\omega(t)$ θα προκύψει το ζητούμενο δένδρο, όπου

$$R(t) = \hat{R}(t) + \omega(t).$$

Τότε καταλήγουμε σε ένα δένδρο της μορφής



<i>Node:</i>	A	B	C	D	E	F	G	H	I
<i>R (%)</i>	3.824	6.937	5.205	3.473	9.716	7.984	6.252	4.520	2.788
<i>p_n</i>	0.1667	0.1217	0.1667	0.2217	0.8867	0.1217	0.1667	0.2217	0.0867
<i>p_m</i>	0.6666	0.6566	0.6666	0.6566	0.0266	0.6566	0.6666	0.6566	0.0266
<i>p_d</i>	0.1667	0.2217	0.1667	0.1217	0.0867	0.2217	0.1667	0.1217	0.8867

Κεφάλαιο 3

Multifactor Models

Μέχρι τώρα, συναντήσαμε μοντέλα επιτοκίου, στα οποία η μόνη επεξηγηματική μεταβλητή ήταν το short rate $r(t)$. Τα μοντέλα αυτά, χαρακτηρίζονταν από την ευκολία με την οποία μπορεί κανείς να τα χρησιμοποιήσει. Παρ' όλα αυτά τα single-factor models αντιμετωπίζουν ισχυρές κριτικές σε πολλά πεδία:

- Συχνά αποτυγχάνουν να ταιριάζουν σε τιμές που έχουν ήδη παρατηρηθεί.
- Από οικονομικής πλευράς φαίνεται μη-λογική η υπόθεση ότι ολόκληρο το term structure ρυθμίζεται από το short rate.
- Είναι πολύ δύσκολο να συμπεριλάβεις μια ρεαλιστική δομή της μεταβλητότητας του forward rate χωρίς να δημιουργήσεις πολύ περίπλοκες προδιαγραφές για το short rate.

Για τους παραπάνω λόγους, και όχι μόνο, πολλοί επιστήμονες πρότειναν να χρησιμοποιηθούν περισσότεροι του ενός, επεξηγηματικοί παράγοντες, για την μοντελοποίηση της αβεβαιότητας των επιτοκίων. Βέβαια, η επιλογή των σωστών παραγόντων που θα χρησιμοποιηθούν στο μοντέλο, είναι ύψιστης σημασίας.

Τα περισσότερα multifactor μοντέλα, βασίζονται σε δύο παράγοντες. Οι Cox, Ingersoll, Ross (1985) και Richard (1978) χρησιμοποίησαν το spot rate και το ποσοστό πληθωρισμού. Οι Longstaff and Schwartz (1991) το spot rate και το volatility του. Τους ίδιους παράγοντες χρησιμοποίησαν και οι Fong and Vasicek (1991) για το μοντέλο τους.

Αρχικά θα εξετάσουμε τρεις γενικές περιπτώσεις two-factor affine-yields μοντέλων και στη συνέχεια θα δούμε μερικά πρακτικά παραδείγματα μοντέλων που έχουν δημιουργηθεί. Στο πρώτο γενικό μοντέλο που θα εξετάσουμε, και οι δύο παράγοντες εμφανίζουν σταθερούς συντελεστές διάχυσης. Αυτό το

μοντέλο θα το ονομάζουμε **two-factor Vasicek model**. Στο δεύτερο μοντέλο, και οι δυο παράγοντες εμφανίζονται κάτω από ρίζα στον συντελεστή διάχυσης (και έτσι δεν μπορούν να λάβουν αρνητικές τιμές). Θα ονομάζουμε αυτό το μοντέλο **two-factor CIR model**. Στο τελευταίο γενικό μοντέλο που θα δούμε, μόνο ο ένας εκ των δύο παραγόντων, εμφανίζεται κάτω από ρίζα στο συντελεστή διάχυσης (και έτσι μόνο ο ένας παράγοντας μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές). Θα ονομάζουμε αυτό το μοντέλο **two-factor mixed model**.

Σε αυτά τα two-factor models που θα εξετάσουμε, οι παράγοντες θα είναι τυχαίοι, θέλοντας να δημιουργήσουμε μια γενική εικόνα των μοντέλων. Επιπλέον, επειδή η τιμή του επιτοκίου που προσπαθούμε να προσδιορίσουμε, χρησιμοποιώντας τους τυχαίους παράγοντες που θα δούμε, δεν είναι η τιμή ενός περιουσιακού στοιχείου, δεν μπορούμε να συνάγουμε ένα market price of risk μόνο από το επιτόκιο. Θέλοντας, λοιπόν, να αποτιμήσουμε τα zero-coupon bonds, ο μόνος τρόπος για να το κάνουμε είναι να κάνουμε χρήση της neutral pricing formula. Για να μπορούμε να τη χρησιμοποιήσουμε, πρέπει να έχουμε ένα risk-neutral μέτρο. Έτσι, κατασκευάζουμε τα μοντέλα αυτά, εξ' αρχής, κάτω από ένα risk-neutral μέτρο.

3.1 Two-Factor Vasicek Model

Για το two-factor Vasicek model υποθέτουμε ότι οι παράγοντες που επηρεάζουν την κίνηση των επιτοκίων $X_1(t), X_2(t)$ ακολουθούν τις στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις

$$dX_1(t) = [a_1 - b_{11}X_1(t) - b_{12}X_2(t)] dt + \sigma_1 d\tilde{B}_1(t) \quad (3.1)$$

$$dX_2(t) = [a_2 - b_{21}X_1(t) - b_{22}X_2(t)] dt + \sigma_2 d\tilde{B}_2(t) \quad (3.2)$$

όπου οι διαδικασίες $\tilde{B}_1(t), \tilde{B}_2(t)$ είναι κινήσεις Brown κάτω από το risk neutral μέτρο πιθανότητας $\tilde{\mathbb{P}}$ με σταθερή συσχέτιση $\nu \in (-1, 1)$, ($d[\tilde{B}_1, \tilde{B}_2](t) = \nu dt$). Οι σταθερές σ_1, σ_2 υποθέτουμε ότι είναι αυστηρά θετικές. Επίσης, υποθέτουμε ότι ο πίνακας

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

έχει αυστηρά θετικές ιδιοτιμές λ_1, λ_2 . Η υπόθεση ότι ο πίνακας B είναι τέτοιος, ώστε οι ιδιοτιμές του να είναι αυστηρά θετικές, επιτρέπει στους παράγοντες $X_1(t), X_2(t)$ καθώς και στους παράγοντες που θα εμφανιστούν όταν δημιουργήσουμε την κανονική μορφή του μοντέλου, να εμφανίζουν την

mean reversion property. Τέλος, υποθέτουμε ότι το επιτόκιο είναι μια γραμμική απεικόνιση των παραγόντων

$$R(t) = \epsilon_0 + \epsilon_1 X_1(t) + \epsilon_2 X_2(t) \quad (3.3)$$

Canonical Form

Με τον τρόπο που παρουσιάστηκε παραπάνω, το two-factor Vasicek model είναι "overparametrized". Παρατηρούμε ότι, διαφορετικές επιλογές των παραμέτρων, $a_i, b_{ij}, \sigma_i, \epsilon_i$ μπορούν να οδηγήσουν στην ίδια διαδικασία για την $R(t)$. Για να αποφύγουμε αυτή την υπερπαραμετροποίηση, θα μετατρέψουμε το μοντέλο (3.1)-(3.2) στην κανονική του μορφή, όπου

$$dY_1(t) = -\lambda_1 Y_1(t) dt + d\tilde{W}_1(t) \quad (3.4)$$

$$dY_2(t) = -\lambda_{21} Y_1(t) dt - \lambda_2 Y_2(t) dt + d\tilde{W}_2(t) \quad (3.5)$$

$$R(t) = \delta_0 + \delta_1 Y_1(t) + \delta_2 Y_2(t) \quad (3.6)$$

όπου οι διαδικασίες $\tilde{W}_1(t), \tilde{W}_2(t)$ είναι **ανεξάρτητες** κινήσεις Brown. Η κανονική μορφή του μοντέλου two-factor Vasicek έχει έξι παραμέτρους

$$\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_{21}, \delta_0, \delta_1, \delta_2$$

Ο τρόπος με τον οποίο οδηγούμαστε στην κανονική μορφή, δεν θα μας απασχολήσει στα πλαίσια αυτής της εργασίας. (see Steven E. Shreve-Stochastic Calculus for Finance 2).

Τελικά, το μοντέλο στο οποίο θα οδηγηθούμε, είναι το εξής:

$$dY_1(t) = -\lambda_2 Y_1 dt + d\tilde{W}_1(t)$$

$$dY_2(t) = -\lambda_{21} Y_1(t) dt - \lambda_2 Y_2(t) dt + d\tilde{W}_2(t)$$

όπου

$$\lambda_{21} = \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2}} [-\rho\lambda_1 + \rho\lambda_2 + k\sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}}]$$

και

$$\gamma_i = p_{i1}^2 \sigma_1^2 + 2\nu p_{i1} p_{i2} \sigma_1 \sigma_2 + p_{i2}^2 \sigma_2^2$$

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\gamma_1 \gamma_2}} [p_{11} p_{21} \sigma_1^2 + \nu (p_{11} p_{22} + p_{12} p_{21}) \sigma_1 \sigma_2 + p_{12} p_{22} \sigma_2^2]$$

με $\rho \in (-1, 1)$ και

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$$

ο πίνακας που χρησιμοποιούμε για να μετατρέψουμε τον B στην κανονική μορφή Jordan.

Επίσης, για το επιτόκιο προκύπτει η σχέση (3.6) ως εξής:

$$R(t) = \delta_0 + \delta_1 Y_1(t) + \delta_2 Y_2(t)$$

όπου

$$\delta_0 = \epsilon_0 - [\epsilon_1 \epsilon_2] P^{-1} V,$$

$$[\delta_1 \delta_2] = [\epsilon_1 \epsilon_2] P^{-1} \Gamma^{-1}$$

και οι πίνακες Γ, V είναι οι

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\gamma_1}} & 0 \\ \frac{-\rho}{\sqrt{\gamma_1(1-\rho^2)}} & \frac{1}{\sqrt{\gamma_2(1-\rho^2)}} \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} -\frac{p_{11}a_1 + p_{12}a_2}{\lambda_1} & \frac{p_{21}a_1 + p_{22}a_2}{\lambda_2} \\ \frac{k(p_{11}a_1 + p_{12}a_2)}{\lambda_1 \lambda_2} & -\frac{p_{21}a_1 + p_{22}a_2}{\lambda_2} \end{bmatrix}$$

Bond Prices

Η τιμή ενός zero-coupon bond που πληρώνει 1 μονάδα στη λήξη T κάτω από την risk-neutral pricing formula, είναι

$$B(t) = \tilde{E} \left[e^{\int_t^T R(u) du} | \mathcal{F}(t) \right], 0 \leq t \leq T$$

Επειδή το short rate $R(t)$ που δίνεται από την (3.6) είναι συνάρτηση των δύο παραγόντων $Y_1(t), Y_2(t)$ η οποίες είναι διαδικασίες Markov, πρέπει να υπάρχει συνάρτηση $f(t, Y_1(t), Y_2(t))$ τ'τοια ώστε

$$B(t, T) = f(t, Y_1(t), Y_2(t)) \quad (3.7)$$

Τότε, γνωρίζουμε ότι, αν $D(t) = e^{-\int_0^t R(u) du}$ είναι ο προεξοφλητικός παράγοντας για τον οποίο ισχύει ότι $dD(t) = -R(t)D(t) dt$ η διαδικασία $D(t)R(t)$ είναι ένα martingale κάτω από το risk-neutral μέτρο πιθανότητας $\tilde{\mathbb{P}}$. Υπολογίζουμε το διαφορικό

$$d(D(t)R(t))$$

και θέτουμε τον dt όρο, ίσο με το μηδέν, οπότε προκύπτει

$$\begin{aligned} & -(\delta_0 + \delta_1 y_1 + \delta_2 y_2) f(t, y_1, y_2) + f_t(t, y_1, y_2) \\ & -\lambda_1 y_1 f_{y_1} - \lambda_2 y_1 f_{y_2} - \lambda_2 y_2 f_{y_2} \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}f_{y_1y_1} + \frac{1}{2}f_{y_2y_2} = 0 \quad (3.8)$$

$\forall t \in [0, T), y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ και συνοριακή συνθήκη

$$f(T, y_1, y_2) = 1, \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R} \quad (3.9)$$

Η λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης είναι της μορφής

$$f(t, y_1, y_2) = e^{-y_1C_1(T-t) - y_2C_2(T-t) - A(T-t)} \quad (3.10)$$

για κάποιες συναρτήσεις $C_1(\tau), C_2(\tau), A(\tau), \tau = T - t$. Η συνοριακή συνθήκη συνεπάγεται ότι

$$C_1(0) = C_2(0) = A(0) = 0 \quad (3.11)$$

Υπολογίζουμε τις παραγώγους

$$\frac{d}{dt}C_i(\tau) = C'_i(\tau) \frac{d}{dt}\tau = -C'_i(\tau), i = 1, 2$$

όπου ' είναι το διαφορικό ως προς τ . Ομοίως

$$\frac{d}{dt}A(\tau) = -A'(\tau)$$

Τότε, έχουμε

$$f_t = [y_1C'_1 + y_2C'_2 + A']f$$

$$f_{y_1} = -C_1f$$

$$f_{y_2} = -C_2f$$

$$f_{y_1y_1} = C_1^2f$$

$$f_{y_1y_2} = C_1C_2f$$

και

$$f_{y_2y_2} = C_2^2f$$

Τότε η εξίσωση (3.8) γίνεται

$$\begin{aligned} & [(C'_1 + \lambda_1C_1 + \lambda_{21}C_2 - \delta_1)y_1 + (C'_2 + \lambda_2C_2 - \delta_2)y_2 \\ & + (A' + \frac{1}{2}C_1^2 + \frac{1}{2}C_2^2 - \delta_0)]f = 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Επειδή, η παραπάνω σχέση θα πρέπει να ισχύει για κάθε y_1, y_2 τότε θα πρέπει, οι παρακάτω όροι να είναι ίσοι με μηδέν

$$C'_1(\tau) = -\lambda_1C_1(\tau) - \lambda_{21}C_2(\tau) \quad (3.13)$$

$$C_2'(\tau) = -\lambda_2 C_2(\tau) + \delta_2 \quad (3.14)$$

$$A'(t) = -\frac{1}{2}C_1^2(\tau) - \frac{1}{2}C_2^2(t) = \delta_0 \quad (3.15)$$

Λύνοντας τις παραπάνω εξισώσεις προκύπτουν τα εξής

$$C_2(\tau) = \frac{\delta_2}{\lambda_2}(1 - e^{-\lambda_2\tau}) \quad (3.16)$$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$C_1(\tau) = \frac{1}{\lambda_1}[\delta_1 - \frac{\lambda_{21}\delta_2}{\lambda_2}](1 - e^{-\lambda_1\tau}) + \frac{\lambda_{21}\delta_2}{\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)}(e^{-\lambda_2\tau} - e^{-\lambda_1\tau}) \quad (3.17)$$

$\lambda_1 = \lambda_2$

$$C_1(\tau) = \frac{1}{\lambda_1}[\delta_1 - \frac{\lambda_{21}\delta_2}{\lambda_{P2}}](1 - e^{-\lambda_1\tau}) + \frac{\lambda_{21}\delta_2}{\lambda_1}\tau e^{-\lambda_1\tau} \quad (3.18)$$

και

$$A(\tau) = \int_0^\tau [-\frac{1}{2}C_1^2(u) - \frac{1}{2}C_2^2(u) + \delta_0] du \quad (3.19)$$

Short rate and Long Rate

Έστω ότι σταθεροποιούμε μια μελλοντική στιγμή T και θεωρούμε τη διάρκεια ως τη λήξη ενός ομολόγου $\bar{\tau}$ δηλαδή $\bar{\tau} = T - t$ (για παράδειγμα 30 χρόνια). Τότε ονομάζουμε Long rate $L(t)$ την απόδοση ενός zero-coupon bond τη στιγμή t με λήξη τη στιγμή T . Τότε από τη σχέση (3.10) γνωρίζουμε ότι

$$B(t, T) = e^{-Y_1(t)C_1(T-t) - Y_2(t)C_2(T-t) - A(T-t)}$$

Συνεπώς η σχέση η οποία μας δίνει το long rate τη στιγμή t είναι

$$L(t) = -\frac{1}{\bar{\tau}} \ln B(t, t + \bar{\tau}) = \frac{1}{\bar{\tau}} [C_1(\bar{\tau})Y_1(t) + C_2(\bar{\tau})Y_2(t) + A(\bar{\tau})] \quad (3.20)$$

Gaussian Factor Processes

Μπορούμε να γράψουμε την κανονική μορφή του μοντέλου two-factor Vasicek υπό μορφή πινάκων ως εξής

$$dY(t) = -\Lambda Y(t) + d\tilde{W}(t) \quad (3.21)$$

με

$$Y(t) = \begin{bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{bmatrix}, \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ \lambda_{21} & \lambda_2 \end{bmatrix}, \tilde{W}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{W}_1(t) \\ \tilde{W}_2(t) \end{bmatrix}$$

Μπορούμε να βρούμε μια λύση κλειστής μορφής στη διαφορική εξίσωση (3.21). Για να καταλήξουμε στη λύση, πρέπει πρώτα να βρούμε τη μορφή του πίνακα $e^{\Lambda t}$ ο οποίος ορίζεται ως εξής

$$e^{\Lambda t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\Lambda t)^n$$

Χωρίς να μπούμε σε λεπτομέρειες της απόδειξης (Steven E. Shreve - Stochastic Calculus for Finance 2) θα πάρουμε ως δεδομένο ότι ισχύει το παρακάτω Λήμμα

Lemma. Για

$$\lambda_1 \neq \lambda_2$$

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ \frac{\lambda_{21}}{\lambda_1 - \lambda_2} (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}) & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

$$\lambda_1 = \lambda_2$$

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ \lambda_{21} t e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_1 t} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Και στις δύο περιπτώσεις ισχύει ότι

$$\frac{d}{dt} e^{\Lambda t} = \Lambda e^{\Lambda t} = e^{\Lambda t} \Lambda \quad (3.24)$$

και

$$e^{-\Lambda t} = (e^{\Lambda t})^{-1} \quad (3.25)$$

όπου ο $e^{-\Lambda t}$ προκύπτει αντικαθιστώντας τα $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{21}$ με $-\lambda_1, -\lambda_2, -\lambda_{21}$ αντίστοιχα.

Χρησιμοποιούμε, τώρα, την στοχαστική διαφορική εξίσωση (3.21) και τον Ito product rule, για να υπολογίσουμε το διαφορικό

$$d(e^{\Lambda t} Y(t)) = e^{\Lambda t} [\Lambda Y(t) dt + dY(t)] = e^{\Lambda t} d\tilde{W}(t)$$

Ολοκληρώνοντας από 0 έως t προκύπτει

$$e^{\Lambda t} Y(t) = Y(0) + \int_0^t e^{\Lambda u} d\tilde{W}(u)$$

Λύνουμε ως προς $Y(t)$

$$Y(t) = e^{-\Lambda t} Y(0) + \int_0^t e^{-\Lambda(t-u)} d\tilde{W}(u) \quad (3.26)$$

Τότε, η σχέση (3.26) μπορεί να γραφεί κατά παράγοντες

$$\lambda_1 \neq \lambda_2$$

$$Y_1(t) = e^{-\lambda_1 t} Y_1(0) + \int_0^t e^{-\lambda_1(t-u)} d\tilde{W}_1(u) \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} Y_2(t) &= \frac{\lambda_{21}}{\lambda_1 - \lambda_2} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) Y_1(0) + e^{-\lambda_2 t} Y_2(0) \\ &+ \frac{\lambda_{21}}{\lambda_1 - \lambda_2} \int_0^t (e^{-\lambda_1(t-u)} - e^{-\lambda_2(t-u)}) d\tilde{W}_1(u) \\ &+ \int_0^t e^{-\lambda_2(t-u)} d\tilde{W}_2(u) \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\lambda_1 = \lambda_2$$

$$Y_1(t) = e^{-\lambda_1 t} Y_1(0) + \int_0^t e^{-\lambda_1(t-u)} d\tilde{W}_1(u) \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} Y_2(t) &= -\lambda_{21} t e^{-\lambda_1 t} Y_1(0) + e^{-\lambda_1 t} Y_2(0) \\ &- \lambda_{21} \int_0^t (t-u) e^{-\lambda_1(t-u)} d\tilde{W}_1(u) + \int_0^t e^{-\lambda_1(t-u)} d\tilde{W}_2(u) \end{aligned} \quad (3.30)$$

Αφού οι $Y_1(t), Y_2(t)$ αποτελούνται από μη-τυχαίες ποσότητες συν ολοκληρώματα Ito, είναι Gaussian processes, συνεπώς το $R(t) = \delta_0 + \delta_1 Y_1(t) + \delta_2 Y_2(t)$ είναι ομοιόμορφα καταναμεμένο.

3.2 Two-Factor CIR Model

Στο προηγούμενο μοντέλο που αναπτύξαμε, οι παράγοντες $Y_1(t), Y_2(t)$ της κανονικής μορφής είναι από κοινού, κανονικά καταναμεμένοι. Επειδή, αυτοί οι παράγοντες οδηγούνται από ανεξάρτητες κινήσεις Brown, δεν συσχετίζονται και έτσι $\forall t \geq 0$ η

$$R(t) = \delta_0 + \delta_1 Y_1(t) + \delta_2 Y_2(t)$$

είναι κανονικά καταναμεμένη τυχαία μεταβλητή με θετική διακύμανση, με εξαίρεση την περίπτωση, όπου $\delta_1 = \delta_2 = 0$. Μάλιστα, υπάρχει θετική πιθανότητα το $R(t)$ να πάρει αρνητικές τιμές. Στο μοντέλο two-factor CIR και οι δύο παράγοντες είναι θετικοί κάθε στιγμή $t \geq 0$ σχεδόν βεβαίως. Ορίζουμε, πάλι το επιτόκιο να είναι της μορφής (3.6) και υποθέτουμε επιπλέον, ότι

$$\delta_0 \geq 0, \delta_1 > 0, \delta_2 > 0. \quad (3.31)$$

Παίρνοντας το αρχικό επιτόκιο $R(0) > 0$ τότε προκύπτει ότι $R(t) \geq 0, \forall t \geq 0$ σχεδόν βεβαίως.

Στην κανονική μορφή, το two-factor CIR model δίνεται

$$dY_1(t) = (\mu_1 - \lambda_{11} Y_1(t) - \lambda_{12} Y_2(t)) dt + \sqrt{Y_1(t)} d\tilde{W}_1(t) \quad (3.32)$$

$$dY_2(t) = (\mu_2 - \lambda_{21}Y_1(t) - \lambda_{22}Y_2(t)) dt + \sqrt{Y_2(t)} d\tilde{W}_2(t) \quad (3.33)$$

όπου

$$\mu_1 \geq 0, \mu_2 \geq 0, \lambda_{11} > 0, \lambda_{22} > 0, \lambda_{12} \leq 0, \lambda_{21} \leq 0. \quad (3.34)$$

Οι παραπάνω συνθήκες εξασφαλίζουν ότι παρ' όλο που ο συντελεστής διολίσθησης $\mu_1 - \lambda_{11}Y_1(t) - \lambda_{12}Y_2(t)$, μπορεί να γίνει αρνητικός, είναι μη-αρνητικός οποτεδήποτε $Y_1(t) = 0$ και $Y_2(t) \geq 0$. Όμοια, ο συντελεστής διολίσθησης $\mu_2 - \lambda_{21}Y_1(t) - \lambda_{22}Y_2(t)$, είναι θετικός όποτε $Y_2(t) = 0$ και $Y_1(t) \geq 0$. Αρχίζοντας από $Y_1(0) \geq 0, Y_2(0) \geq 0$, έχουμε ότι $Y_1(t) \geq 0, Y_2(t) \geq 0, \forall t \geq 0$, σχεδόν βεβαίως.

Εδώ οι στοχαστικές διαδικασίες $\tilde{W}_1(t), \tilde{W}_2(t)$ υποθέτουμε ότι είναι ανεξάρτητες, καθώς αν υπήρχε συντελεστής συσχέτισης ρ μεταξύ τους, η μερική διαφορική εξίσωση (3.35) θα εμφάνιζε έναν επιπλέον όρο, τον $\rho\sqrt{y_1 y_2} f_{y_1 y_2}$. Αυτός ο όρος, θα προκαλούσε βλάβη στο σύστημα των διαφορικών εξισώσεων (3.39),(3.40),(3.41).

Bond Prices

Όπως και στο μοντέλο Vasicek που συναντήσαμε στην προηγούμενη παράγραφο, έτσι και εδώ, η τιμή, τη στιγμή t ενός zero-coupon bond που πληρώνει 1 μονάδα στη λήξη T θα ισούται με

$$B(t, T) = f(t, Y_1(t), Y_2(t))$$

για κάποια συνάρτηση f των $Y_1(t), Y_2(t)$. Χρησιμοποιώντας, ξανά, την risk-neutral pricing formula, θα υπολογίσουμε το διαφορικό $d(D(t)B(t, T))$ και θα θέσουμε τον dt όρο, ίσο με μηδέν, οπότε και θα προκύψει μια μερική διαφορική εξίσωση.

$$\begin{aligned} & -(\delta_0 + \delta_1 y_1 + \delta_2 y_2) f(t, y_1, y_2) + f_2(t, y_1, y_2) \\ & + (\mu_1 - \lambda_{11} y_1 - \lambda_{12} y_2) f_{y_1}(t, y_1, y_2) + (\mu_2 - \lambda_{21} y_1 - \lambda_{22} y_2) f_{y_2}(t, y_1, y_2) \\ & + \frac{1}{2} y_1 f_{y_1 y_1}(t, y_1, y_2) + \frac{1}{2} y_2 f_{y_2 y_2}(t, y_1, y_2) = 0 \end{aligned} \quad (3.35)$$

$\forall t \in [0, T), y_1, y_2 \geq 0$. Η λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης, είναι της μορφής

$$f(t, y_1, y_2) = e^{-y_1 C_1(T-t) - y_2 C_2(T-t) - A(T-t)} \quad (3.36)$$

για κάποιες συναρτήσεις $C_1(\tau), C_2(\tau), A(\tau)$ και $\tau = T - t$. Η συνοριακή συνθήκη

$$f(T, Y_1(T), Y_2(T)) = B(T, T) = 1$$

συνεπάγεται ότι

$$C_1(0) = C_2(0) = A(0) = 0 \quad (3.37)$$

Όπως και πριν, συμβολίζουμε με τ το διαφορικό ως προς τ και έχουμε $\frac{d}{d\tau}C_i(\tau) = -C'_i(\tau)$, $i = 1, 2$ και $\frac{d}{d\tau}A(\tau) = -A'(\tau)$.

Τότε η (3.35), γίνεται

$$\begin{aligned} & [(C'_1 + \lambda_{11}C_1 + \lambda_{21}C_2 + \frac{1}{2}C_1^2 - \delta_1)y_1 \\ & + (C'_2 + \lambda_{21}C_1 + \lambda_{22}C_2 + \frac{1}{2}C_2^2 - \delta_2)y_2 \\ & + (A' - \mu_1C_1 - \mu_2C_2 - \delta_0)]f = 0 \end{aligned} \quad (3.38)$$

Ακολουθώντας την ίδια μεθοδολογία, όπως και στο προηγούμενο μοντέλο, επειδή η (3.38), πρέπει να ισχύει για κάθε $y_1, Y_2 \geq 0$ οδηγούμαστε στο παρακάτω σύστημα εξισώσεων

$$C'_1(\tau) = -\lambda_{11}C_1(\tau) - \lambda_{21}C_2(\tau) - \frac{1}{2}C_1^2(\tau) + \delta_1 \quad (3.39)$$

$$C'_2(\tau) = -\lambda_{12}C_1(\tau) - \lambda_{22}C_2(\tau) - \frac{1}{2}C_2^2(\tau) = \delta_2 \quad (3.40)$$

$$A'(\tau) = \mu_1C_1(\tau) + \mu_2C_2(\tau) + \delta_0 \quad (3.41)$$

Η λύση του παραπάνω συστήματος, η οποία ικανοποιεί την συνοριακή συνθήκη (3.37), μπορεί να βρεθεί αριθμητικά.

3.3 Mixed Model

Όπως αναφέραμε και στη εισαγωγή αυτής της ενότητας, στα γενικά μοντέλα δύο παραγόντων, που θα παρουσιάσουμε, ανήκει και εκείνη η κατηγορία, στην οποία ο ένας παράγοντας επιτρέπεται να πάρει αρνητικές τιμές και ο άλλος παίρνει μόνο θετικές τιμές.

Η κανονική μορφή ενός mixed model είναι

$$dY_1(t) = (\mu - \lambda_1 Y_1(t)) dt + \sqrt{Y_1(t)} d\tilde{W}_1(t) \quad (3.42)$$

$$dY_2(t) = -\lambda_2 Y_2(t) dt + \sigma_{21} \sqrt{Y_1(t)} d\tilde{W}_1(t) + \sqrt{\alpha + \beta Y_1(t)} d\tilde{W}_2(t) \quad (3.43)$$

Υποθέτουμε ότι $\mu \geq 0, \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \alpha \geq 0, \beta \geq 0$ και $\sigma_{21} \in \mathfrak{R}$. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι οι κινήσεις Brown $\tilde{W}_1(t), \tilde{W}_2(t)$ είναι ανεξάρτητες.

Αν $Y_1(0) \geq 0$ τότε καταλήγουμε στο συμπέρασμα, ότι $Y_1(t) \geq 0, \forall t \geq 0$, σχεδόν βεβαίως. Από την άλλη πλευρά, ακόμα κι αν $Y_1(t) \geq 0$, το $Y_2(t)$ μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές για $t > 0$. Το επιτόκιο ορίζεται και εδώ από τη σχέση

$$R(t) = \delta_0 + \delta_1 Y_1(t) + \delta_2 Y_2(t) \quad (3.44)$$

Bond Prices

Όπως και στα δύο προηγούμενα μοντέλα, η αξία, τη στιγμή t , ενός zero-coupon bond που πληρώνει 1 μονάδα στη λήξη T , θα είναι της μορφής

$$B(t, T) = e^{-Y_1(t)C_1(T-t) - Y_2(t)C_2(T-t) - A(T-t)} \quad (3.45)$$

όπου οι συναρτήσεις $C_1(\tau)$, $C_2(\tau)$, $A(\tau)$ πρέπει να ικανοποιούν τη συνοριακή συνθήκη

$$C_1(0) = C_2(0) = A(0) = 0 \quad (3.46)$$

Προχωρώντας με την ίδια μεθοδολογία όπως πριν, καταλήγουμε σε μια μερική διαφορική εξίσωση, υπολογίζοντας το διαφορικό, $d(D(t)f(t, Y_1(t), Y_2(t)))$ και από εκεί συμπεραίνουμε ότι οι C_1 , C_2 και A πρέπει να είναι τέτοιες ώστε να ικανοποιούν το σύστημα εξισώσεων

$$C_1' = -\lambda_1 C_1 - \frac{1}{2} C_1^2 - \sigma_{21} C_1 C_2 - (1 + \beta) C_2^2 + \delta_1 \quad (3.47)$$

$$C_2' = -\lambda_2 C_2 + \delta_2 \quad (3.48)$$

$$A' = \mu C_1 - \frac{1}{2} \alpha C_2^2 + \delta_0 \quad (3.49)$$

3.4 Examples of Two-Factor Models

3.4.1 Brennan and Schwartz (1979-1982)

Οι Brennan-Schwartz το 1979, πρότειναν ένα μοντέλο δύο παραγόντων σύμφωνα με το οποίο το term structure των επιτοκίων, εξαρτάται από το short term rate $r(t)$ και από το long term rate $l(t)$. Το long term rate ορίζεται ως¹

$$\lim_{T \rightarrow \infty} R(t, T)$$

Οι διαδικασίες που ακολουθούν οι τιμές του short και του long rate, σύμφωνα με το μοντέλο των Brennan and Schwartz, είναι

$$dr(t) = \mu_r() dt + \sigma_r() dW_r(t) \quad (3.50)$$

$$dl(t) = \mu_l() dt + \sigma_l() dW_l(t) \quad (3.51)$$

Όπου, $W_r(t)$, $W_l(t)$ κινήσεις Brown με συντελεστή συσχέτισης ρ , δηλαδή $d[W_r, W_l](t) = \rho dt$ και $\mu_r()$, $\sigma_r()$, $\mu_l()$, $\sigma_l()$ συναρτήσεις των t , $r(t)$, $l(t)$. Με

¹ Στην πράξη το long term rate μπορεί να προσδιοριστεί από την απόδοση ενός ομολόγου με άπειρο χρόνο ως τη λήξη, το οποίο πληρώνει μόνο κουπόνια και διαπραγματεύεται σε μερικές αγορές

τον τρόπο που ορίζεται το συγκεκριμένο μοντέλο, ανταναχλά την υπόθεση, ότι το long term rate περιέχει κάποια πληροφορία σχετικά με την μελλοντική τιμή του short term rate.

Η τιμή, τη στιγμή t , ενός zero-coupon bond που πληρώνει 1 μονάδα στη λήξη, είναι συνάρτηση των $T, r(t), l(t)$ και άρα

$$B(t, T) \equiv B(t, T, r(t), l(t)) \quad (3.52)$$

Εφαρμόζοντας την formula Ito προκύπτει

$$dB(t, T) = \mu_B() dt + \sigma_{B,r} dW_r(t) + \sigma_{B,l} dW_l(t) \quad (3.53)$$

όπου

$$\mu_B() = B_t \mu_r B_r + \mu_l B_l + \frac{1}{2} \sigma_r^2 B_{rr} + \frac{1}{2} \sigma_l^2 B_{ll} + \rho \sigma_r \sigma_l B_{rl} \quad (3.54)$$

$$\sigma_{B,r}() = -\sigma_r B_r \quad (3.55)$$

$$\sigma_{B,l}() = -\sigma_l B_l \quad (3.56)$$

Χρησιμοποιώντας την ίδια μεθοδολογία arbitrage όπως και στα single-factor models καταλήγουμε στη σχέση²

$$\mu_B() - r(t)B(t, T) = \lambda_r(t, r, l) \sigma_{B,r}() + \lambda_l(t, r, l) \sigma_{B,l}() \quad (3.57)$$

όπου οι συναρτήσεις $\lambda_r(t, r, l), \lambda_l(t, r, l)$ δεν εξαρτώνται από το maturity date T και καλούνται market risk premium for the short rate και risk premium for the long rate αντίστοιχα. Αντικαθιστώντας στην (3.57) τα $\mu_B(), \sigma_{B,r}(), \sigma_{B,l}()$ προκύπτει

$$B_t + (\mu_r - \lambda_r \sigma_r) B_r + (\mu_l - \lambda_l \sigma_l) B_l + \frac{1}{2} \sigma_r^2 B_{rr} + \frac{1}{2} \sigma_l^2 B_{ll} + \rho \sigma_r \sigma_l B_{rl} - rB = 0 \quad (3.58)$$

με συνοριακή συνθήκη $B(T, T) = 1$ και $\mu_r, \mu_l, \sigma_r, \sigma_l$ πραγματικές συναρτήσεις οι οποίες πρέπει να προσδιοριστούν. Τότε, η λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης μπορεί να υπολογιστεί με αριθμητικές μεθόδους.

3.4.2 Richard(1978) and Cox, Ingersoll, Ross(1985)

Ο Richard το 1978 πρότεινε, ένα μοντέλο στο οποίο το term structure των επιτοκίων προσδιορίζεται από δύο παράγοντες: το real short term rate $q(t)$

²Βλέπε στο τέλος της ενότητας

και το στιγμιαίο ποσοστό πληθωρισμού $\pi(t)$. Οι δύο παράγοντες, υπέθεσε ότι, ακολουθούν ανεξάρτητες στοχαστικές διαδικασίες

$$dq(t) = \mu_q(t) dt + \sigma_q(t) dW_q(t) \quad (3.59)$$

$$d\pi(t) = \mu_\pi(t) dt + \sigma_\pi(t) dW_\pi(t) \quad (3.60)$$

όπου οι διαδικασίες $W_q(t)$, $W_\pi(t)$ είναι ανεξάρτητες κινήσεις Brown. Το μοντέλο αυτό, παρουσιάστηκε, επίσης, και στην εργασία των Cox, Ingersoll, Ross (1985b)

Η μερική διαφορική εξίσωση για την τιμή ενός zero-coupon bond προκύπτει και εδώ όπως παραπάνω

$$B_t + (\mu_q - \lambda_q \sigma_q) B_q + (\mu_\pi - \lambda_\pi \sigma_\pi) B_\pi + \frac{1}{2} \sigma_q^2 B_{qq} + \frac{1}{2} \sigma_\pi^2 B_{\pi\pi} - rB = 0 \quad (3.61)$$

Όμως αυτή η μερική διαφορική εξίσωση, εξαρτάται, τώρα, από τους $\pi(t)$, $q(t)$, $r(t)$ και από τα λ_q , λ_π . Ευτυχώς, είναι δυνατό, να εκφράσουμε το $r(t)$ σαν συνάρτηση των $\pi(t)$, $q(t)$ και να ξαναγράψουμε την μερική διαφορική εξίσωση σε μια απλοποιημένη μορφή.

3.4.3 Fong and Vasicek(1991, 1992a, 1992b)

Οι Fong-Vasicek, σε μια σειρά από δημοσιεύσεις τους, συνέστησαν ένα μοντέλο δύο παραγόντων για τον προσδιορισμό του term structure των επιτοκίων. Οι παράγοντες που επηρεάζουν, σύμφωνα με το μοντέλο αυτό την καμπύλη, είναι το short term rate $r(t)$ και η διακύμανση των μεταβολών του short term rate $v(t)$. Σύμφωνα με το μοντέλο που ανέπτυξαν, το short term rate εξελίσσεται κάτω από το risk-neutral μέτρο πιθανότητας σύμφωνα με τη διαδικασία

$$dr(t) = \alpha(\bar{r} - r(t)) dt + \sqrt{u(t)} d\tilde{W}_1(t) \quad (3.62)$$

όπου, \bar{r} η μακροπρόθεσμη μεση τιμή του short rate r και $u(t)$ είναι το στιγμιαίο του, volatility. Η διακύμανση, είναι στοχαστική και ακολουθεί τη διαδικασία

$$du(t) = \gamma(\bar{u} - u(t)) dt + \xi \sqrt{u(t)} d\tilde{W}_2(t) \quad (3.63)$$

Οι $\tilde{W}_1(t)$, $\tilde{W}_2(t)$ είναι κινήσεις Brown κάτω από το risk-neutral μέτρο πιθανότητας και συσχετίζονται μεταξύ τους.

Στα άρθρα τους, οι Fong and Vasicek πρότειναν μια γενική μερική διαφορική εξίσωση, στην οποία υπακούει κάθε χρεόγραφο πάνω στο επιτόκιο

$$V_t + \alpha(\bar{r} - r)V_r + \gamma(\bar{v} - v)V_v + \frac{v}{2}V_{rr} + \frac{\xi^2 v}{2}V_{vv} + V\xi vV_{vr} - rV = 0 \quad (3.64)$$

η οποία, ανάλογα την περίπτωση του αξιόγραφου, υπόκεινται σε κάποια συνοριακή συνθήκη.

Λύνοντας την (3.64) για zero-coupon bond με συνοριακή συνθήκη $B(T, T) = 1$ προκύπτει η τιμή του ομολόγου τη στιγμή t

$$B(t, T) = e^{-rA(\tau) + vC_1(\tau) + C_2(\tau)} \quad (3.65)$$

όπου $\tau = T - t$ και

$$A(\tau) = \frac{1 - e^{-\alpha\tau}}{\alpha}$$

είναι το μέτρο για το duration το οποίο εμφανίζεται στο άρθρο του Vasicek (1977).

Οι συναρτήσεις $C_1(\tau), C_2(\tau)$ είναι αρκετά περίπλοκες και απαιτούν τη χρήση μιγαδικής άλγεβρας.

3.5 Define risk-adjusted drift rate for two-factor models

Ας θεωρήσουμε το μοντέλο δύο παραγόντων των Brennan and Schwartz το οποίο είδαμε στην προηγούμενη ενότητα.

$$\begin{cases} dr(t) = \mu_r(t) dt + \sigma_r(t) dW_r(t) \\ dl(t) = \mu_l(t) dt + \sigma_l(t) dW_l(t) \end{cases}$$

και

$$d[W_r, W_l](t) = \rho dt$$

Η τιμή ενός zero-coupon bond που πληρώει 1 μονάδα στη λήξη T , θα είναι

$$B(t, T) \equiv B(t, T, r(t), l(t))$$

Τότε από την multidimensional Ito formula προκύπτει ότι

$$dB = \mu_B(t) dt + \sigma_{B,r}(t) dW_r(t) + \sigma_{B,l}(t) dW_l(t) \quad (3.66)$$

όπου

$$\mu_B(t) = B_t + \mu_r B_r + \mu_l B_l + \frac{1}{2} \sigma_r^2 B_{rr} + \frac{1}{2} \sigma_l^2 B_{ll} + \rho \sigma_r \sigma_l B_{rl} \quad (3.67)$$

$$\sigma_{B,r}(t) = \sigma_r B_r \quad (3.68)$$

$$\sigma_{B,l}(t) = \sigma_l B_l \quad (3.69)$$

Δημιουργούμε χαρτοφυλάκιο από τρία τέτοια ομόλογα με maturities T_1, T_2, T_3 σε ποσότητες V_1, V_2, V_3 αντίστοιχα.

Τότε η μεταβολή στην αξία του χαρτοφυλακίου, θα είναι

$$\begin{aligned} d\pi &= V_1 dB_{T_1} + V_2 dB_{T_2} + V_3 dB_{T_3} \\ &= (V_1\mu_{T_1} + V_2\mu_{T_2} + V_3\mu_{T_3}) dt \\ &\quad + (V_1\sigma_{T_1,r} + V_2\sigma_{T_2,r} + V_3\sigma_{T_3,r}) dW_r \\ &\quad + (V_1\sigma_{T_1,l} + V_2\sigma_{T_2,l} + V_3\sigma_{T_3,l}) dW_l \end{aligned} \quad (3.70)$$

Επιλέγω κατάλληλα V_1, V_2, V_3 ώστε να αποφύγω τους παράγοντες αβεβαιότητας

$$\begin{cases} V_1\sigma_{T_1,r} + V_2\sigma_{T_2,r} + V_3\sigma_{T_3,r} = 0 \\ V_1\sigma_{T_1,l} + V_2\sigma_{T_2,l} + V_3\sigma_{T_3,l} = 0 \end{cases} \quad (3.71)$$

Τότε, το χαρτοφυλάκιο γίνεται ντετερμινιστικό και έτσι η απόδοσή του πρέπει να ισούτε με το risk-free rate

$$V_1\mu_{T_1} + V_2\mu_{T_2} + V_3\mu_{T_3} = \pi r \quad (3.72)$$

Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$V_1(\mu_{T_1} - rB_{T_1}) + V_2(\mu_{T_2} - rB_{T_2}) + V_3(\mu_{T_3} - rB_{T_3}) = 0 \quad (3.73)$$

Προκύπτει έτσι ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων για τα ποσά των ομολόγων στο χαρτοφυλάκιο

$$\begin{bmatrix} \sigma_{T_1,r} & \sigma_{T_2,r} & \sigma_{T_3,r} \\ \sigma_{T_1,l} & \sigma_{T_2,l} & \sigma_{T_3,l} \\ \mu_{T_1} - rB_{T_1} & \mu_{T_2} - rB_{T_2} & \mu_{T_3} - rB_{T_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

Το παραπάνω σύστημα έχει μη-τετριμμένη λύση, αν οι γραμμές του πίνακα είναι γραμμικά εξαρτημένες, δηλαδή κάποιες από αυτές μπορούν να γραφούν σαν γραμμικός συνδυασμός των άλλων. Αν, οι πρώτες δύο γραμμές ήταν γραμμικά εξαρτημένες, θα είχαμε μία πηγή αβεβαιότητας, επομένως ένα single-factor model. Έτσι η τρίτη γραμμή θα πρέπει να είναι γραμμικός συνδυασμός των άλλων δύο:

$$\mu_{T_i} - rB_{T_i} = \lambda_r\sigma_{T_i,r} + \lambda_l\sigma_{T_i,l} \quad (3.75)$$

Δεδομένου ότι τα T_i ήταν τυχαία, η παραπάνω σχέση πρέπει να ισχύει για κάθε T_i και έτσι τα λ_r, λ_l δεν εξαρτώνται από τα maturity dates των ομολόγων.

$$\lambda_r \equiv \lambda_r(t, r(t), l(t)), \lambda_l \equiv \lambda_l(t, r(t), l(t))$$

Έτσι καταλήγουμε στη μερική διαφορική εξίσωση

$$B_t + (\mu_r - \lambda_r\sigma_r)B_r + (\mu_l - \lambda_l\sigma_l)B_l + \frac{1}{2}\sigma_r^2 B_{rr} + \frac{1}{2}\sigma_l^2 B_{ll} + \rho\sigma_r\sigma_l B_{rl} - rB = 0 \quad (3.76)$$

Κεφάλαιο 4

Heath-Jarrow-Morton, Libor Market Model

4.1 Heath-Jarrow-Morton Model

Οι Heath, Jarrow, Morton ανέπτυξαν ένα μοντέλο προσδιορισμού της κίνησης των επιτοκίων, το οποίο, κάθε στιγμή αποτυπώνει την καμπύλη των forward rates τη στιγμή εκείνη. Το forward rate $f(t, T)$ το οποίο περιγράφεται από το HJM model είναι το στιγμιαίο επιτόκιο, το οποίο μπορεί να "κλειδωθεί" τη στιγμή t για δανεισμό τη μελλοντική στιγμή $T, T \geq t$. Όπως θα δούμε, η forward rate curve μπορεί να συναχθεί από την τιμή ενός zero-coupon bond και αντίστροφα, η τιμή ενός zero-coupon bond μπορεί να συναχθεί από την forward rate curve.

Επειδή οι τιμές των zero-coupon bonds προκύπτουν άμεσα από το μοντέλο των HJM και όχι έμμεσα (χρησιμοποιώντας τη risk-neutral pricing formula) πρέπει να προσέξουμε ότι το μοντέλο αυτό, δεν παράγει τιμές οι οποίες επιδέχονται arbitrage. Έτσι, το HJM είναι ένα μοντέλο το οποίο παρέχει μια ικανή και αναγκαία συνθήκη, για ένα μοντέλο που οδηγείται από μια κίνηση Brown, να είναι arbitrage-free.

Όπως είπαμε και παραπάνω, το HJM model, αναπτύσσει ολόκληρη την καμπύλη των forward rates. Υπάρχουν πολλοί πιθανοί τρόποι αναπαράστασης αυτής της καμπύλης. Ο τρόπος που επέλεξαν οι Heath, Jarrow, Morton είναι σε όρους forward rates τα οποία μπορούν να "κλειδωθούν" κάποια στιγμή t για δανεισμό σε κάποια μελλοντική στιγμή T . Θα δούμε αρχικά, τί εννοούμε με τον όρο forward rates τα οποία μπορούν να "κλειδωθούν" μια στιγμή για δανεισμό σε μια μελλοντική στιγμή.

4.1.1 Forward Rates

Σταθεροποιούμε ένα χρονικό ορίζοντα \bar{T} (για παράδειγμα 50 χρόνια). Όλα τα ομόλογα για τα οποία θα γίνει λόγος παρακάτω, θα υποθέσουμε ότι λήγουν μέχρι τη στιγμή \bar{T} .

Για $0 \leq t \leq T \leq \bar{T}$ ¹ συμβολίζουμε την τιμή ενός zero-coupon bond τη στιγμή t το οποίο πληρώνει 1 μονάδα τη στιγμή λήξης T , ως $B(t, T)$. Υποθέτουμε ότι τα ομόλογα αυτά, δεν παρουσιάζουν κίνδυνο για default. Πρέπει, επιπλέον, να έχουμε στο μυαλό μας, ότι αν το επιτόκιο είναι αυστηρά θετικό, τότε η τιμή του ομολόγου $B(t, T)$ είναι μικρότερη της μονάδας κάθε στιγμή $t < T$. Τη στιγμή t μπορούμε να δημιουργήσουμε μια μελλοντική επένδυση, τη στιγμή T κατασκευάζοντας το παρακάτω χαρτοφυλάκιο. Παίρνουμε δ , ένα μικρό θετικό αριθμό. Τότε

- Παίρνουμε θέση short μεγέθους 1, σε ομόλογα που λήγουν τη στιγμή T . Αυτό μας δημιουργεί εισόδημα $B(t, T)$
- Παίρνουμε θέση long μεγέθους $\frac{B(t, T)}{B(t, T + \delta)}$ ομόλογα που λήγουν τη στιγμή $T + \delta$. Το κόστος για αυτή τη θέση είναι $B(t, T)$ ²

Τότε παρατηρούμε ότι το συνολικό κόστος δημιουργίας αυτού του χαρτοφυλακίου είναι ίσο με μηδέν τη στιγμή t . Τη χρονική στιγμή T διατηρώντας αυτό το χαρτοφυλάκιο, δημιουργείται η απαίτηση να πληρώσουμε 1, για να καλύψουμε τη θέση short που είχαμε πάρει στο ομόλογο λήξης T . Τη μελλοντική στιγμή $T + \delta$, έχοντας θέση long σε $\frac{B(t, T)}{B(t, T + \delta)}$ ομόλογα λήξης $T + \delta$, θα λάβουμε $\frac{B(t, T)}{B(t, T + \delta)}$ μονάδες.

Εύκολα παρατηρούμε εδώ, ότι δημιουργώντας το κατάλληλο χαρτοφυλάκιο τη στιγμή t , εξασφαλίσαμε την απόδοση μιας μελλοντικής επένδυσης τη στιγμή T , με χρονικό ορίζοντα έως τη στιγμή $T + \delta$, η οποία θα μας εξασφαλίσει απόδοση

$$\frac{1}{\delta} \ln \left[\frac{B(t, T)}{B(t, T + \delta)} \right] = - \frac{\ln B(t, T + \delta) - \ln B(t, T)}{\delta} \quad (4.1)$$

Ορίζουμε το forward rate τη στιγμή t για επένδυση τη στιγμή T , να είναι

$$f(t, T) = - \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln B(t, T + \delta) - \ln B(t, T)}{\delta} = - \frac{\theta}{\theta T} \ln B(t, T) \quad (4.2)$$

Αυτό είναι το στιγμιαίο επιτόκιο τη στιγμή T , το οποίο μπορεί να "κλειδωθεί", κάποια στιγμή στο $t, t \leq T$.

¹Οι λήξεις $0 \leq T \leq \bar{T}$ είναι άπειρες, το ίδιο και οι ομολογίες που λήγουν τις στιγμές αυτές, και ξεκινούν τις στιγμές $0 \leq t \leq T$

²Παρατήρησε ότι $\frac{B(t, T)}{B(t, T + \delta)} > 1$ δεδομένου ότι τα επιτόκια είναι αυστηρά θετικά.

Αν γνωρίζουμε το $f(t, T)$ για κάθε $0 \leq t \leq T \leq \bar{T}$ μπορούμε να προσδιορίσουμε την τιμή των ομολόγων $B(t, T), 0 \leq t \leq T \leq \bar{T}$ χρησιμοποιώντας τη formula

$$\int_t^T f(t, v) dv = -[\ln B(t, T) - \ln B(t, t)] = -\ln B(t, T) \quad (4.3)$$

αφού $B(t, t) = 1$. Τότε,

$$B(t, T) = e^{-\int_t^T f(t, v) dv} \quad (4.4)$$

Παρατηρούμε, δηλαδή, ότι μπορούμε να προσδιορίσουμε τα forward rates από την (4.2) γνωρίζοντας τις τιμές όλων των ομολόγων $B(t, T)$ και αντιστρόφως, τις τιμές των ομολόγων $B(t, T)$ αν γνωρίζουμε τα $f(t, T), 0 \leq t \leq T \leq \bar{T}$ από την (4.4). Έτσι, τουλάχιστον θεωρητικά, δεν εμφανίζεται το ζήτημα, αν κατασκευάζουμε ένα μοντέλο για τα forward rates ή τις τιμές των ομολόγων. Επίσης, εύκολα αντιλαμβανόμαστε ότι το στιγμιαίο επιτόκιο τη στιγμή T είναι το

$$R(t) = f(t, t) \quad (4.5)$$

Το επιτόκιο, δηλαδή, το οποίο μπορούμε να κλειδώσουμε τη στιγμή t , για δανεισμό τη στιγμή t .

4.1.2 Dynamics of Forward Rates and Bond Prices

Υποθέτουμε ότι το $f(0, T), 0 \leq T \leq \bar{T}$, είναι γνωστό τη στιγμή 0. Αυτή είναι η αρχική καμπύλη των forward rates. Σύμφωνα με το μοντέλο των Heath, Jarrow, Morton, ³ το forward rate σε μελλοντικές στιγμές t για επένδυση σε ακόμα πιο μελλοντικές στιγμές T , δίνεται από

$$f(t, T) = f(0, T) + \int_0^t \alpha(u, T) du + \int_0^t \sigma(u, T) dW(u) \quad (4.6)$$

Παίρνοντας το διαφορικό ως προς το t στην παραπάνω σχέση, μπορούμε να την ξαναγράψουμε ως εξής

$$df(t, T) = \alpha(t, T) dt + \sigma(t, T) dW(t), 0 \leq t \leq T^3 \quad (4.7)$$

Πρέπει να προσέξουμε ότι σε αυτή την ενότητα, το d , είναι το διαφορικό ως προς τη μεταβλητή t .

Εδώ η $W(u)$ είναι κίνηση Brown ως προς το πραγματικό μέτρο πιθανότητας \mathbb{P} . Επίσης, οι διαδικασίες $\alpha(t, T), \sigma(t, T)$ για κάθε σταθεροποιημένο T , είναι $\mathcal{F}(t)$ μετρήσιμες.

³Το T θεωρείται σταθερό

Από την (4.7) μπορούμε να εργαστούμε πάνω στη δυναμική των τιμών των ομολόγων βασιζόμενοι στη σχέση (4.4). Να σημειώσουμε αρχικά, ότι επειδή στην $-\int_t^T f(t, v) dv$ η μεταβλητή t εμφανίζεται σε δύο μέρη, το διαφορικό της ως προς t θα έχει δύο όρους

$$d[-\int_t^T f(t, v) dv] = f(t, t) - \int_t^T df(t, v) dv \quad (4.8)$$

Ο πρώτος όρος προκύπτει διαφορίζοντας ως προς το κάτω όριο του ολοκληρώματος. Ο αριστερός όρος προκύπτει διαφορίζοντας ως προς το t που βρίσκεται μέσα στο ολοκλήρωμα.

Τότε προκύπτει ότι:

$$d[-\int_t^T f(t, v) dv] = R(t) dt - \int_t^T [\alpha(t, v) dt + \sigma(t, v) dW(t)] dv$$

Αντιστρέφοντας τη σειρά ολοκλήρωσης και γράφοντας

$$\int_t^T \alpha(t, v) dt dv = \int_t^T \alpha(t, v) dv dt = \alpha^*(t, T) dt \quad (4.9)$$

$$\int_t^T \sigma(t, v) dW(t) dv = \int_t^T \sigma(t, v) dv dW(t) = \sigma^*(t, T) dW(t) \quad (4.10)$$

όπου

$$\alpha^*(t, T) = \int_t^T \alpha(t, v) dv \quad (4.11)$$

και

$$\sigma^*(t, T) = \int_t^T \sigma(t, v) dv \quad (4.12)$$

Τελικά, έχουμε ότι

$$d[-\int_t^T f(t, v) dv] = (R(t) - \alpha^*(t, T)) dt - \sigma^*(t, T) dW(t) \quad (4.13)$$

Για $g(x) = e^x$, σύμφωνα με την (4.4), έχουμε ότι

$$B(t, T) = g[-\int_t^T f(t, v) dv] \quad (4.14)$$

Τότε, από την Ito formula, προκύπτει η σχέση

$$dB(t, T) = B(t, T)[R(t) - \alpha^*(t, T) + \frac{1}{2}\sigma^*(t, T)^2] dt - \sigma^*(t, T)B(t, T) dW(t) \quad (4.15)$$

4.1.3 No-Arbitrage Condition

Σύμφωνα με το μοντέλο των HJM υπάρχει ένα zero-coupon bond με λήξη T , για κάθε $T \in [0, \bar{T}]$. Πρέπει να σιγουρευτούμε ότι δεν μπορούν να υπάρξουν ευκαιρίες arbitrage στις συναλλαγές αυτών των ομολόγων.

Σύμφωνα με το First Fundamental Theorem of Asset Pricing, αρκεί να βρούμε ένα μέτρο πιθανότητας $\tilde{\mathbb{P}}$ κάτω από το οποίο κάθε προεξοφλημένη τιμή του ομολόγου να είναι martingale.

Όπως έχουμε δει αρκετές φορές στην συγκεκριμένη εργασία, η προεξοφλημένη τιμή του ομολόγου είναι

$$D(t)B(t, T) = e^{-\int_0^t R(u) du} B(t, T) \quad (4.16)$$

Παίρνοντας το διαφορικό ως προς t της (4.16) και τον Ito Product Rule⁴ προκύπτει ότι

$$d(D(t)B(t, T)) = -R(t)D(t)B(t, T) dt + D(t) dB(t, T) \quad (4.17)$$

αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση, την (4.15), καταλήγουμε στην

$$d(D(t)B(t, T)) = D(t)B(t, T)[-a^*(t, T) + \frac{1}{2}\sigma^*(t, T)^2] dt - D(t)B(t, T)\sigma^*(t, T) dW(t) \quad (4.18)$$

ή αλλιώς

$$d(D(t)B(t, T)) = D(t)B(t, T)[(-a^*(t, T) + \frac{1}{2}\sigma^*(t, T)^2) dt - \sigma^*(t, T) dW(t)] \quad (4.19)$$

Στο σημείο αυτό, θα θέλαμε να γράψουμε τον όρο μέσα στις αγκύλες, στη μορφή

$$-\sigma^*(t, T)[\Theta(t) dt + u dW(t)]$$

και έπειτα να χρησιμοποιούσαμε το θεώρημα Girsanov και να κατασκευάζαμε ένα νέο μέτρο πιθανότητας $\tilde{\mathbb{P}}$ κάτω από το οποίο η διαδικασία

$$\tilde{W}(t) = \int_0^t \Theta(u) du + W(t) \quad (4.20)$$

να είναι τυπική κίνηση Brown δηλαδή, κίνηση Brown χωρίς συντελεστή διολίσθησης.

Κάνοντας μερικές απλές πράξεις, καταλήγουμε στο συμπέρασμα, ότι πρέπει να βρούμε μια διαδικασία $\Theta(t)$ η οποία να ικανοποιεί την

$$-a^*(t, T) + \frac{1}{2}\sigma^*(t, T)^2 = -\sigma^*(t, T)\Theta(t) \quad (4.21)$$

⁴Να θυμηθούμε ότι $dD(t) = -R(t) dt$

Παρατηρούμε εδώ, ότι οι εξισώσεις (4.21) είναι άπειρες, μία για κάθε ημερομηνία λήξης $T \in (0, \bar{T}]$. Αυτές είναι οι εξισώσεις από τις οποίες προκύπτει το market price of risk και έχουμε τόσες εξισώσεις, όσα είναι τα zero-coupon bonds με λήξη T .

Παρά όλα αυτά, υπάρχει μοναδική διαδικασία $\Theta(t)$. Αυτή η διαδικασία είναι το market price of risk και υπάρχουν τόσες διαδικασίες, όσες και οι πηγές αβεβαιότητας που θεωρούμε στο μοντέλο μας. Σε αυτή την περίπτωση, έχουμε υποθέσει ότι υπάρχει μόνο μία πηγή αβεβαιότητας που καθοδηγεί το μοντέλο. Για να λύσουμε την (4.21) θα πρέπει πρώτα να θυμηθούμε ότι

$$\frac{\theta}{\theta T} \alpha^*(t, T) = \alpha(t, T), \quad \frac{\theta}{\theta T} \sigma^*(t, T) = \sigma(t, T)$$

Παίρνοντας το διαφορικό της (4.21), ως προς T , προκύπτει

$$-\alpha(t, T) + \sigma^*(t, T)\sigma(t, T) = -\sigma(t, T)\Theta(t)$$

ή ισοδύναμα

$$\alpha(t, T) = \sigma(t, T)[\sigma^*(t, T) + \Theta(t)] \quad (4.22)$$

Theorem. (*Heath-Jarrow-Morton no-arbitrage condition*) Ένα term-structure model για τις τιμές όλων των zero-coupon bonds που λήγουν τις στιγμές $T \in (0, \bar{T}]$, το οποίο οδηγείται από μοναδική κίνηση Brown, δεν επιτρέπει ευκαιρίες arbitrage αν υπάρχει διαδικασία $\Theta(t)$ έτσι ώστε η (4.22) να ισχύει για κάθε $0 \leq t \leq T \leq \bar{T}$.

Απόδειξη. Αρχεί να δείξουμε ότι αν η $\Theta(t)$ ικανοποιεί την (4.22) τότε, ικανοποιεί επίσης την (4.21) και άρα μπορούμε χρησιμοποιώντας το θεώρημα Girsanov να κατασκευάσουμε ένα risk-neutral μέτρο πιθανότητας. Η ύπαρξη ενός τέτοιου μέτρου πιθανότητας, εγγυάται την απουσία ευκαιριών arbitrage. Έστω ότι η $\Theta(t)$ ικανοποιεί την (4.22). Γράφουμε ξανά την εξίσωση, αντικαθιστώντας όπου T , με v . Τότε

$$\alpha(t, v) = \sigma(t, v)[\sigma^*(t, v) + \Theta(t)]$$

Ολοκληρώνοντας ως προς v , από $v = t$ έως $v = T$, έχουμε

$$\alpha^*(t, v)|_{v=t}^{v=T} = \frac{1}{2}\sigma^*(t, v)^2|_{v=t}^{v=T} + \sigma^*(t, v)\Theta(t)|_{v=t}^{v=T}$$

Όμως, $\alpha^*(t, t) = \sigma^*(t, t) = 0$ συνεπώς,

$$\alpha^*(t, T) = \frac{1}{2}\sigma^*(t, T)^2 + \sigma^*(t, T)\Theta(t)$$

η οποία είναι η (4.21). □

Όσο το $\sigma(t, T)$ είναι μη μηδενικό, μπορούμε να λύσουμε την (4.22) ως προς $\Theta(t)$:

$$\Theta(t) = \frac{\alpha(t, T)}{\sigma(t, T)} - \sigma^*(t, T)^5, 0 \leq t \leq T \quad (4.23)$$

Αυτό δείχνει ότι το $\Theta(t)$ είναι μοναδικό, και έτσι το risk-neutral μέτρο πιθανότητας είναι μοναδικό. Τότε, από το Second Fundamental Theorem of Asset Pricing, έχουμε ότι το μοντέλο μας είναι πλήρες, δηλαδή, όλα τα, βασισμένα στο επιτόκιο, παράγωγα μπορούν να αντισταθμιστούν συναλλάσσοντας zero-coupon bonds.

4.1.4 HJM Under Risk-Neutral Measure

Υποθέτωντας ότι το μοντέλο ικανοποιεί την HJM no-arbitrage σχέση, (4.22) μπορούμε να ξαναγράψουμε την (4.7) ως

$$\begin{aligned} df(t, T) &= \alpha(t, T) dt + \sigma(t, T) dW(t) \\ &= \sigma(t, T)\sigma^*(t, T) dt + \sigma(t, T)[\Theta(t) + dW(t)] \\ &= \sigma(t, T)\sigma^*(t, T) dt + \sigma(t, T) d\tilde{W}(t) \end{aligned} \quad (4.24)$$

Όπου $\tilde{W}(t)$, η κίνηση Brown κάτω από το risk-neutral μέτρο πιθανότητας $\tilde{\mathbb{P}}$. Κάτω από το καινούργιο μέτρο πιθανότητας, η προεξοφλημένη τιμή ενός zero-coupon bond είναι martingale και μάλιστα ισχύει ότι

$$d(D(t)B(t)) = -\sigma^*(t, T)D(t)B(t, T) d\tilde{W}(t)$$

Γνωρίζουμε ότι $d\frac{1}{dB(t)} = \frac{R(t)}{D(t)}$. Τότε, το διαφορικό της τιμής του ομολόγου θα δίνεται

$$\begin{aligned} dB(t, T) &= d\left[\frac{1}{D(t)}D(t)B(t, T)\right] \\ &= \frac{R(t)}{D(t)}D(t)B(t, T) dt - \sigma^*(t, T)\frac{1}{D(t)}D(t)B(t, T) d\tilde{W}(t) \\ &= R(t)B(t, T) dt - \sigma^*(t, T)B(t, T) d\tilde{W}(t) \end{aligned} \quad (4.25)$$

Η λύση της (4.25) προκύπτει σχετικά εύκολα⁶ και είναι

$$B(t, T) = \frac{B(0, T)}{D(t)} e^{-\int_0^t \sigma^*(u, T) d\tilde{W}(u) - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^*(u, T)^2 du} \quad (4.26)$$

⁵Υπενθύμιση: $\sigma^*(t, T) = \frac{\theta}{\theta T} \sigma(t, T)$

⁶. Θέτεις $Y(t) = \ln B(t, T)$ και $g(x) = \ln x$ και εφαρμόζεις την formula Ito για την $Y(t)$

4.2 Forward LIBOR Model

Σε αυτή την ενότητα, θα παρουσιάσουμε το forward Libor model. Είδαμε κατά την ανάλυση που κάναμε για το Heath-Jarrow-Morton model ότι η κίνηση των forward rates κάτω από το risk-neutral μέτρο πιθανότητας, ακολουθεί τη στοχαστική διαδικασία

$$df(t, T) = \sigma(t, T)\sigma^*(t, T) dt + \sigma(t, T) d\tilde{W}(t)$$

Κάποια από τα μειονεκτήματα του μοντέλου HJM που είδαμε στην προηγούμενη ενότητα, είναι ότι εξετάζει τα στιγμιαία forward rates, τα οποία δεν είναι άμεσα παρατηρήσιμα στην αγορά. Ένα άλλο σημαντικό μειονέκτημα, είναι ότι είναι δύσκολο να βαθμονομηθεί για τιμές ενεργώς διαπραγματευόμενων χρηματοοικονομικών μέσων. Επίσης, με σκοπό να προσαρμόσουμε την Black-Scholes formula για δικαιώματα πάνω σε μετοχές και έτσι να καταλήξουμε στη formula του Black για αποτίμηση των caplets, θα θέλαμε να κατασκευάσουμε ένα μοντέλο στο οποίο τα forward rates να είναι log-normal, κάτω από το risk-neutral μέτρο πιθανότητας. Για να το επιτύχουμε αυτό, θα πρέπει να θέσουμε $\sigma(t, T) = \sigma f(t, T)$ όπου σ , μια θετική σταθερά. Τότε θα είχαμε:

$$\sigma^*(t, T) = \int_t^T \sigma(t, v) dv = \sigma \int_t^T f(t, v) dv \quad (4.27)$$

και τότε, η κίνηση του forward rate κάτω από το risk-neutral μέτρο πιθανότητας θα είναι της μορφής:

$$df(t, T) = [\sigma^2 f(t, T) \int_t^T f(t, v) dv] dt + \sigma f(t, T) d\tilde{W}(t) \quad (4.28)$$

Παρατηρούμε εδώ, ότι ο συντελεστής διολίσθησης είναι ο όρος

$$\sigma^2 f(t, T) \int_t^T f(t, v) dv \quad (4.29)$$

Οι Heath, Jarrow, Morton, έδειξαν ότι αυτός ο συντελεστής διολίσθησης προκαλεί 'εκρηξη' στα forward rates. Για T κοντά στο t , ο 'συντελεστής διολίσθησης είναι περίπου ίσος με $\sigma^2(T-t)f^2(t, T)$, όπου το τετράγωνο των forward rates προκαλεί το πρόβλημα.

Λόγω αυτού του προβλήματος που αντιμετωπίζουμε με τα συνεχώς ανατοχιζόμενα forward rates, αναπτύχθηκε το LIBOR market model.

Θα συστήσουμε, σε αυτό το σημείο, το LIBOR market model και θα δούμε πώς από αυτό, καταλήγουμε στην Black caplet formula, η οποία είναι από τις πιο σημαντικές εφαρμογές του μοντέλου αυτού.

4.2.1 Forward LIBOR

Έστω $0 \leq t \leq T$ και $\delta \geq 0$ μια δοσμένη σταθερά. Όπως είδαμε στην προηγούμενη ενότητα, μπορούμε να δημιουργήσουμε ένα χαρτοφυλάκιο μια χρονική στιγμή t με το οποίο μπορούμε να "κλειδώσουμε" την απόδοση της επένδυσής μας (ή το επιτόκιο δανεισμού), για το χρονικό διάστημα $[T, T + \delta]$. Είδαμε, ότι οι θέσεις που παίρνουμε, έχουν μηδενικό συνολικό κόστος τη στιγμή t και είναι τέτοιες ώστε να κλειδώνουν μια επένδυση 1 μονάδας, τη μελλοντική στιγμή T , για χρονικό διάστημα δ , η οποία αποφέρει $\frac{B(t,T)}{B(t,T+\delta)}$, τη χρονική στιγμή $T + \delta$.

Το συνεχώς ανατοκίζόμενο επιτόκιο το οποίο εξηγεί αυτή την απόδοση, δίνεται από την (4.1). Εδώ, θα μελετήσουμε ένα επιτόκιο απλού ανατοκισμού, το οποίο εξηγεί την απόδοση που επιτυγχάνεται κάνοντας την παραπάνω επένδυση.

Αυτό το επιτόκιο το συμβολίζουμε με $L(t, T)$ και ορίζεται από την σχέση

ύψος επένδυσης * (1+διάρκεια επένδυσης * επιτόκιο)=πρόσοδος

Η χρησιμοποιώντας κατάλληλο συμβολισμό

$$1 + \delta L(t, T) = \frac{B(t, T)}{B(t, T + \delta)} \quad (4.30)$$

Αν λύσουμε την εξίσωση (4.30) ως προς το επιτόκιο, έχουμε:

$$L(t, T) = \frac{B(t, T) - B(t, T + \delta)}{\delta B(t, T + \delta)} \quad (4.31)$$

Για $0 \leq t \leq T$, καλούμε το $L(t, T)$ forward LIBOR. Όταν $t = T$, το ονομάζουμε spot LIBOR ή απλά LIBOR.

4.2.2 Black Caplet Formula

Ένα από τα πιο συνηθισμένα παράγωγα προϊόντα είναι το interest rate cap. Ένα interest rate cap είναι ένα συμβόλαιο, το οποίο πληρώνει τη διαφορά, μεταξύ ενός μεταβλητού επιτοκίου πάνω σε κάποιο κεφάλαιο, και ενός σταθερού επιτοκίου (cap) πάνω στο ίδιο κεφάλαιο, όταν το μεταβλητό επιτόκιο υπερβεί το cap rate. Μπορούμε να κατανοήσουμε καλύτερα τη λειτουργία των interest rate caps, αν σκεφτούμε ένα κυμαινόμενο επιτόκιο όπου επαναπροσδιορίζεται περιοδικά με βάση το LIBOR. Ο χρόνος μεταξύ των επαναπροσδιορισμών του επιτοκίου ονομάζεται tenor. Το interest rate cap δημιουργήθηκε ώστε να παρέχει ασφάλεια, ενάντια στην αύξηση του κυμαινόμενου επιτοκίου, πάνω από ένα επιθυμητό όριο. Ας δούμε ένα παράδειγμα, το οποίο θα μας βοηθήσει να καταλάβουμε τον σκοπό ύπαρξής,

αλλά και τη λειτουργία ενός cap συμβολαίου. Έστω ότι μια εταιρεία, έχει πάρει δάνειο από μια τράπεζα, \$10 εκατομμύρια, με επιτόκιο ίσο με το LIBOR 3-μηνών. Έχουμε, με άλλα λόγια, 3-μηνο ανατοκισμό. Ο χρόνος λήξης του δανείου είναι 10 έτη και η τράπεζα έχει αγοράσει ένα cap με κεφάλαιο \$10 εκατομμύρια, tenor 3-months, η διάρκεια του cap είναι 5 έτη, και το cap rate είναι ίσο με 4%.

Αγνοούμε προς στιγμή, προβλήματα που προκύπτουν από τον ακριβή αριθμό ημερών και υποθέτουμε ότι μεταξύ των πληρωμών μεσολαβούν ακριβώς 0.25 έτη. Έστω, ότι σε μια συγκεκριμένη ημερομηνία πληρωμής, το 3-month LIBOR είναι 5%. Τότε το συμβόλαιο κυμαινόμενου επιτοκίου, θα απαιτούσε

$$0.25 * 0.05 * \$10,000,000 = \$125000$$

να πληρωθούν τρεις μήνες μετά. Αν αυτή η ημερομηνία πληρωμής, βρίσκεται στη διάρκεια ζωής του cap, τότε, η επόμενη πληρωμή (σε τρεις μήνες), θα γίνει σύμφωνα με το cap rate και θα ισούται με

$$0.25 * 0.04 * \$10,000,000 = \$100000$$

Παρατηρούμε ότι το cap παρέχει ένα payoff της τάξης των \$25000. Πρέπει, επίσης, να προσέξουμε, ότι το payoff δεν εμφανίζεται την ημερομηνία παρατήρησης του 5%, αλλά τρεις μήνες αργότερα. Δηλαδή, στο παράδειγμά μας, όπου το cap έχει διάρκεια ζωής, 5 έτη, θα υπάρχουν συνολικά 19 ημέρες πληρωμής (τις στιγμές 0.25, 0.75,...4.75 έτη) και 19 ενδεχόμενα payoffs. Κάθε μέρα πληρωμής, κατά τη διάρκεια, ενός cap παρατηρείται το LIBOR 3 μηνών. Αν είναι μικρότερο από 4%, δεν θα υπάρξει payoff από το cap τρεις μήνες αργότερα. Αν υπερβαίνει το cap rate τότε τρεις μήνες αργότερα, θα εμφανιστεί ένα payoff της τάξης του $(\delta P(L(\delta_j, \delta_j) - K)^+$ τη στιγμή δ_{j+1} αν η στιγμή παρατήρησης του LIBOR ήταν η δ_j . Όπου δ συμβολίζουμε το tenor, K , είναι το cap rate πολλαπλασιασμένο επί το ονομαστικό κεφάλαιο και P το ονομαστικό κεφάλαιο.

Για να αποτιμήσουμε ένα συμβόλαιο cap τη στιγμή μηδέν, αρκεί να προσδιορίσουμε την τιμή για κάθε μία από τις πληρωμές ξεχωριστά, (interest rate caplet), και στη συνέχεια προσθέτουμε αυτές τις επιμέρους τιμές. Σε αυτή την υποενότητα, θα δούμε πώς γίνεται αυτό, και θα κατασκευάσουμε την Black caplet formula.

Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι κάθε μια από τις επιμέρους πληρωμές, είναι της μορφής $\delta P(L(\delta_j, \delta_j) - K)^+$ όπου, $K' = \frac{K}{\delta P}$, το cap rate.

Συνεπώς, αρκεί να προσδιορίσουμε την, προεξοφλημένη στη στιγμή μηδέν, τιμή της πληρωμής $(L(T, T) - K)^+$, που θα γίνει τη στιγμή $T + \delta$ για ένα τυχαίο T και $K > 0$.

Ας δούμε, τώρα, ποιά είναι η τιμή, τη στιγμή, t ενός συμβολαίου, το οποίο πληρώνει $L(T, T)$, τη στιγμή $T + \delta$.

Theorem. (Price of backset LIBOR) Έστω, $0 \leq t \leq T$ και $\delta > 0$. Η τιμή τη στιγμή, t σύμφωνα με την επιχειρηματολογία no-arbitrage, ενός συμβολαίου που πληρώνει $L(T, T)$, τη στιγμή $T + \delta$, είναι

$$S(t) = \begin{cases} B(t, T + \delta)L(t, T), & 0 \leq t \leq T \\ B(t, T + \delta)L(T, T), & T \leq t \leq T + \delta \end{cases} \quad (4.32)$$

Απόδειξη. Υπάρχουν δύο περιπτώσεις που πρέπει να διαχωρίσουμε. Στην πρώτη περίπτωση, όπου, $T \leq t \leq T + \delta$, το LIBOR έχει καθοριστεί στο επίπεδο $L(T, T)$ και είναι γνωστό τη στιγμή t . Η αξία τη στιγμή, t , ενός συμβολαίου το οποίο πληρώνει 1 μονάδα τη στιγμή $T + \delta$, είναι ίση με $B(t, T + \delta)$, συνεπώς, η αξία τη στιγμή t , ενός συμβολαίου που πληρώνει $L(T, T)$, τη στιγμή $T + \delta$, θα είναι $L(T, T)B(t, T + \delta)$. Στη δεύτερη περίπτωση, όπου, $0 \leq t \leq T$, γνωρίζουμε από την (4.31) ότι

$$B(t, T + \delta)L(t, T) = \frac{1}{\delta}[B(t, T) - B(t, T + \delta)]$$

Πρέπει να δείξουμε, ότι το δεξί μέλος της εξίσωσης, είναι η τιμή τη στιγμή t , ενός backset LIBOR συμβολαίου.⁷ Για να το επιτύχουμε αυτό, έστω ότι τη στιγμή t , έχουμε κεφάλαιο ίσο με $\frac{1}{\delta}[B(t, T) - B(t, T + \delta)]$, και χρησιμοποιούμε αυτό το κεφάλαιο για να φτιάξουμε ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο αποτελείται απο:

- Θέση long σε $\frac{1}{\delta}$ zero-coupon bonds λήξης T
- Θέση short σε $\frac{1}{\delta}$ zero-coupon bonds λήξης $T + \delta$.

Τη στιγμή T , λαμβάνουμε $\frac{1}{\delta}$ από τη θέση long και τα χρησιμοποιούμε για να αγοράσουμε $\frac{1}{\delta B(T, T + \delta)}$ ομόλογα, λήξης $T + \delta$, έτσι ώστε τη στιγμή T , να έχουμε μια θέση με $\frac{1}{\delta B(T, T + \delta)} - \frac{1}{\delta}$ σε zero-coupon bonds λήξης $T + \delta$. Τη στιγμή $T + \delta$, αυτό το χαρτοφυλάκιο πληρώνει

$$\frac{1}{\delta B(T, T + \delta)} - \frac{1}{\delta} = \frac{B(T, T) - B(T, T + \delta)}{\delta B(T, T + \delta)} = L(T, T)$$

Συνεπώς, καταλήξαμε στο ζητούμενο, ότι το κεφάλαιο που χρησιμοποιήσαμε τη στιγμή t για την κατασκευή του χαρτοφυλακίου, πρέπει να είναι η τιμή του συμβολαίου, που πληρώνει $L(T, T)$ τη στιγμή $T + \delta$. \square

⁷Με τον όρο backset LIBOR συμβόλαιο, ορίζουμε, ένα συμβόλαιο στο οποίο σε μια ημέρα πληρωμής, η πληρωμή γίνεται με βάση την τιμή του LIBOR όπως αυτή είχε διαμορφωθεί την αμέσως προηγούμενη ημέρα πληρωμής.

Έστω, τώρα, ότι χρησιμοποιούμε την τιμή του zero-coupon bond $B(t, T + \delta)$ ως μονάδα μέτρησης. Τότε, κάτω από αυτή τη μονάδα μέτρησης, η αξία τη στιγμή t ενός backset LIBOR συμβολαίου, θα είναι ίση με

$$\frac{S(t)}{B(t, T + \delta)} = \begin{cases} L(t, T), & 0 \leq t \leq T \\ L(T, T), & T \leq t \leq T + \delta \end{cases} \quad (4.33)$$

Μπορούμε, τώρα, να δούμε ότι, τουλάχιστον για $0 \leq t \leq T$ το forward LIBOR $L(t, T)$ είναι η forward price ενός συμβολαίου το οποίο πληρώνει το backset LIBOR $L(T, T)$ τη στιγμή $T + \delta$.

Forward-Price. Ονομάζουμε *forward contract* μια συμφωνία που πληρωθεί μια προκαθορισμένη τιμή K , σε μια προκαθορισμένη ημερομηνία T , για ένα περιουσιακό στοιχείο του οποίου η τιμή, τη στιγμή t είναι ίση με $S(t)$. Η *forward-price* $For_S(t, T)$ αυτού του περιουσιακού στοιχείου, τη στιγμή $t, 0 \leq t \leq T$, είναι η αξία του K , η οποία δεν επιτρέπει ευκαιρίες *arbitrage* στο *forward contract*.

Theorem. Υποθέτουμε, ότι υπάρχουν προς συναλλαγή, *zero-coupon bonds* για κάθε *maturity date*. Τότε,

$$For_S(t, T) = \frac{S(t)}{B(t, T)}, 0 \leq t \leq T \leq \bar{T}^8 \quad (4.34)$$

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι τη στιγμή t κάποιος, πουλάει ένα forward contract, με ημέρα παράδοσης T και delivery price K . Ας υποθέσουμε, επιπλέον, ότι η τιμή του K , έχει επιλεγεί έτσι ώστε, το forward contract έχει τιμή μηδέν, τη χρονική στιγμή t . Πουλώντας το forward contract δεν έχει καθόλου εισόδημα. Αφού έχει πουλήσει το forward contract, αμέσως, παίρνει θέση short σε $\frac{S(t)}{B(t, T)}$ zero-coupon bonds απ όπου προκύπτει εισόδημα $S(t)$. Χρησιμοποιεί το εισόδημα $S(t)$ και αγοράζει 1 μονάδα του περιουσιακού στοιχείου. Μέχρι τη στιγμή λήξης του συμβολαίου, T , δεν κάνει καμία περαιτέρω ενέργεια. Τη στιγμή T , παραδίδει τη 1 μονάδα του περιουσιακού στοιχείου στον αντισυμβαλλόμενο του συμβολαίου στην προσυμφωνημένη τιμή K . Τότε, αφού καλύψει τη θέση short που έχει πάρει στα zero-coupon bonds, θα έχει μείνει με $K - \frac{S(t)}{B(t, T)}$ ⁹. στην περίπτωση που αυτή η ποσότητα είναι θετική, τότε εκμεταλεύτηκε μια ευκαιρία *arbitrage* αφού κατάφερε και έβγαλε κέρδος με μηδενικό αρχικό κεφάλαιο. Στην περίπτωση, που αυτή η

⁸Όπου \bar{T} μια σταθεροποιημένη μελλοντική ημερομηνία (για παράδειγμα 50 χρόνια)

⁹Αφού κάθε ομόλογο πληρώνει 1 μονάδα στη λήξη T , τότε, αφού αυτός είχε πάρει θέση short σε $\frac{S(t)}{B(t, T)}$ ομόλογα, τη στιγμή T , θα πληρώσει $\frac{S(t)}{B(t, T)}$ μονάδες.

ποσότητα ήταν αρνητική, θα μπορούσε να πάρει τις ακριβώς αντίθετες θέσεις και να πετύχει κατ' ανάλογο τρόπο arbitrage. Αν θέλουμε να αποκλείσουμε τις ευκαιρίες arbitrage θα πρέπει η K , να δίνεται από την (4.34). \square

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι τουλάχιστον για $0 \leq t \leq T$ το forward LIBOR $L(t, T)$ είναι η $T + \delta$ -forward price του συμβολαίου που πληρώνει $L(T, T)$ τη στιγμή $T + \delta$.

Αν κατασκευάσουμε ένα μοντέλο term-structure το οποίο οδηγείται από μια κίνηση Brown κάτω από το πραγματικό μέτρο πιθανότητας \mathbb{P} και ικανοποιεί την Heath-Jarrow-Morton no-arbitrage condition (4.1) τότε, όπως είδαμε στην προηγούμενη ενότητα, υπάρχει κίνηση Brown $\tilde{W}(t)$ κάτω από το risk-neutral μέτρο πιθανότητας \mathbb{P} έτσι ώστε τα forward rates και οι τιμές των zero-coupon bonds να δίνονται από τις (4.24) και (4.25) αντίστοιχα.

Θέλουμε, να βρούμε ένα μέτρο πιθανότητας κάτω από το οποίο η τιμή $L(t, T) = \frac{S(t)}{B(t, T+\delta)}$ να είναι martingale.

Theorem. (Change of risk-neutral measure) Έστω $S(t), N(t)$ οι τιμές δύο περιουσιακών στοιχείων, εκφρασμένες σε κοινό νόμισμα και έστω $\sigma(t) = (\sigma_1(t), \sigma_2(t), \dots, \sigma_d(t))$ και $v(t) = (v_1(t), v_2(t), \dots, v_d(t))$ υποδηλώνουν τα αντίστοιχα διανύσματα των διαδικασιών μεταβλητότητάς τους:

$$d(D(t)S(t)) = D(t)S(t)\sigma(t) d\tilde{W}(t)$$

$$d(D(t)N(t)) = D(t)N(t)v(t) d\tilde{W}(t)$$

Αν θεωρήσουμε σαν μονάδα μέτρησης το $N(t)$, τότε η τιμή του $S(t)$ γίνεται $S^{(N)}(t) = \frac{S(t)}{N(t)}$.

Τότε, κάτω από το μέτρο πιθανότητας

$$\tilde{\mathbb{P}}^{(N)}(A) = \frac{1}{N(0)} \int_A D(T)N(T) d\tilde{\mathbb{P}}, \forall A \in \mathcal{F}$$

η στοχαστική διαδικασία $S^{(N)}(t)$ είναι martingale. Μάλιστα, είναι

$$dS^{(N)}(t) = S^{(N)}(t)[\sigma(t) - v(t)] d\tilde{W}^{(N)}(t) \quad (4.35)$$

όπου, $\tilde{W}^{(N)}(t)$ κίνηση Brown κάτω από το μέτρο πιθανότητας $\tilde{\mathbb{P}}$ η οποία ορίζεται ως εξής:

$$\tilde{W}^{(N)}(t) = - \int_0^t v_j(u) du + \tilde{W}_j(t), j = 1, 2, \dots, d \quad (4.36)$$

Απόδειξη. Για την απόδειξη του εν λόγω θεωρήματος μπορεί ο αναγνώστης να ανατρέξει στο Stochastic Calculus for Finance 2, Steven E. Shreve, page 380, Theorem 9.2.2 \square

Σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, το risk-neutral μέτρο πιθανότητας όταν μονάδα μέτρησης, είναι το $B(t, T + \delta)$ είναι το

$$\tilde{\mathbb{P}}^{T+\delta}(A) = \frac{1}{B(0, T + \delta)} \int_A D(T + \delta) d\tilde{\mathbb{P}}, \forall A \in \mathcal{F} \quad (4.37)$$

και η κίνηση Brown κάτω από το μέτρο $\tilde{\mathbb{P}}$ δίνεται από τη σχέση

$$\tilde{W}^{T+\delta}(t) = \int_0^t \sigma^*(u, T + \delta) du + \tilde{W}(t) \quad (4.38)$$

Θα ονομάζουμε το μέτρο $\tilde{\mathbb{P}}$, $(T + \delta)$ -forward μέτρο.

Από το παραπάνω θεώρημα, προκύπτει, επίσης, ότι το $L(t, T) = \frac{S(t)}{B(t, T+\delta)}$ είναι martingale κάτω από το μέτρο πιθανότητας $\tilde{\mathbb{P}}^{T+\delta}$. Έτσι, σύμφωνα με το Martingale Representation Theorem πρέπει να υπάρχει διαδικασία $\gamma(t, T)$, $0 \leq t \leq T$ για σταθερό T , τέτοια ώστε

$$dL(t, T) = \gamma(t, T)L(t, T) d\tilde{W}^{T+\delta}(t), 0 \leq t \leq T \quad (4.39)$$

Καταφέραμε, λοιπόν, να βρούμε ένα μέτρο πιθανότητας κάτω από το οποίο, η forward-price $L(t, T)$ είναι martingale. Παρατηρούμε, δηλαδή, ότι καταλήγοντας στη σχέση (4.39) καταφέραμε, ο όρος του dt να είναι ίσος με μηδέν. Αξίζει να θυμηθούμε, ότι το πρόβλημα με τα forward rates που είδαμε στην αρχή της ενότητας, το δημιουργούσε ο όρος του dt , βλέπε σχέση (4.29). Το forward LIBOR model είναι κατασκευασμένο έτσι ώστε η διαδικασία $\gamma(t, T)$, η οποία ορίζεται στο διάστημα $0 \leq t \leq T \leq \bar{T}$, να είναι μη-τυχαία. Όταν η $\gamma(t, T)$ είναι μη-τυχαία, η forward-price $L(t, T)$, θα είναι λογαριθμοκανονική, κάτω από το μέτρο πιθανότητας $\tilde{\mathbb{P}}^{T+\delta}$. Αυτό μας οδηγεί στην παρακάτω formula για την αποτίμηση ενός caplet.

Theorem. (*Black caplet formula*) Έστω caplet, το οποίο πληρώνει $(L(T, T) - K)^+$ τη στιγμή $T + \delta$, όπου K , μη-αρνητική σταθερά. Έστω, επίσης, ότι το forward LIBOR ακολουθεί την στοχαστική διαδικασία (4.39) και ότι η $\gamma(t, T)$, είναι μη-τυχαία. Τότε, η τιμή του caplet τη στιγμή μηδέν θα είναι ίση με

$$C(0) = B(0, T + \delta)[L(0, T)\mathcal{N}(d_+) - K\mathcal{N}(d_-)] \quad (4.40)$$

όπου,

$$d_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{\int_0^T \gamma^2(t, T) dt}} \left[\log \frac{L(0, T)}{K} \pm \frac{1}{2} \int_0^T \gamma^2(t, T) dt \right] \quad (4.41)$$

Απόδειξη. Σύμφωνα με την Risk-Neutral Pricing formula η τιμή ενός caplet τη στιγμή μηδέν, είναι ίση με την προεξοφλημένη (κάτω από το risk-neutralμετρο) αναμενόμενη τιμή του payoff, η οποία είναι

$$C(0) = \tilde{E}[D(T + \delta)(L(T, T) - K)^+]$$

Διαιρώντας και πολλαπλασιάζοντας με $B(0, T + \delta)$ προκύπτει ότι,

$$\begin{aligned} \tilde{E}[D(T + \delta)(L(T, T) - K)^+] &= B(0, T + \delta) \tilde{E}\left[\frac{D(T + \delta)}{B(0, T + \delta)}(L(T, T) - K)^+\right] \\ &= B(0, T + \delta) \tilde{E}^{T+\delta}[(L(T, T) - K)^+] \end{aligned} \quad (4.42)$$

Η λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης (4.39) είναι της μορφής

$$L(T, T) = L(0, T) e^{\left\{ \int_0^T \gamma(t, T) d\tilde{W}^{T+\delta}(t) - \frac{1}{2} \int_0^T \gamma^2(t, T) dt \right\}} \quad (4.43)$$

Θέτουμε $\bar{\gamma}(T) = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \gamma^2(t, T) dt}$. Γνωρίζουμε γενικά, ότι ένα ολοκλήρωμα Ito της μορφής $I(t) = \int_0^t \Delta(s) dW(s)$ είναι μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί κανονική κατανομή, με μέση τιμή μηδέν και διακύμανση $\int_0^t \Delta^2(s) ds$. Συνεπώς, εδώ, το ολοκλήρωμα Ito, $\int_0^T \gamma(t, T) d\tilde{W}^{T+\delta}(t)$, ακολουθεί κανονική κατανομή, με μέσο μηδέν και διακύμανση $\bar{\gamma}^2(T)T$, την οποία μπορούμε να γράψουμε στη μορφή, $-\bar{\gamma}(T)\sqrt{T}X$, όπου, $X = -\frac{1}{\bar{\gamma}(T)\sqrt{T}} \int_0^T \gamma(t, T) d\tilde{W}^{T+\delta}(t)$. Χρησιμοποιώντας αυτό τον συμβολισμό, έχουμε ότι

$$L(T, T) = L(0, T) e^{-\bar{\gamma}(T)\sqrt{T}X - \frac{1}{2}\bar{\gamma}^2(T)T}$$

και η αναμενόμενη τιμή, κάτω από το $(T + \delta)$ -forward μέτρο πιθανότητας, θα ισούται με

$$\tilde{E}^{T+\delta}[(L(T, T) - K)^+] = \tilde{E}^{T+\delta}[(L(0, T) e^{-\bar{\gamma}(T)\sqrt{T}X - \frac{1}{2}\bar{\gamma}^2(T)T} - K)^+] \quad (4.44)$$

Η λύση της (4.44) είναι

$$\begin{aligned} \tilde{E}^{T+\delta}[(L(T, T) - K)^+] &= BS(T, L(0, T); K, 0, \bar{\gamma}(T)) \\ &= L(0, T)\mathcal{N}(d_+) - K\mathcal{N}(d_-) \end{aligned}$$

όπου d_{\pm} όπως στην (4.40). □

4.2.3 Relation between forward Libor volatility and Zero-Coupon Bond volatility

Σε αυτή την υποενότητα, θα προσπαθήσουμε να βρούμε μια σχέση, που να συνδέει το forward LIBOR volatility $\gamma(t, T)$ με τα volatilities $\sigma^*(t, T + \delta), \sigma^*(t, T)$ των zero-coupon bonds που λήγουν τις χρονικές στιγμές $T + \delta, T$ αντίστοιχα.

Έχουμε δει ότι ισχύει η σχέση

$$L(t, T) + \frac{1}{\delta} = \frac{B(t, T)}{\delta B(t, T + \delta)}$$

Τότε, σύμφωνα με τη σχέση (4.26) έχουμε ότι

$$D(t)B(t, T) = B(0, T)e^{-\int_0^t \sigma^*(u, T) d\tilde{W}(u) - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^*(u, T)^2 du}$$

και αντίστοιχα

$$D(t)B(t, T + \delta) = B(0, T + \delta)e^{-\int_0^t \sigma^*(u, T + \delta) d\tilde{W}(u) - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^*(u, T + \delta)^2 du}$$

Συνδυάζοντας τις τρεις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} L(t, T) + \frac{1}{\delta} &= \frac{B(t, T)}{\delta B(t, T + \delta)} \\ &= \frac{B(0, T)}{\delta B(0, T + \delta)} \exp\left\{ \int_0^t [\sigma^*(u, T + \delta) - \sigma^*(u, T)] d\tilde{W}(u) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \int_0^t [\sigma^*(u, T + \delta)^2 - \sigma^*(u, T)^2] du \right\} \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την Ito-Doebelin formula, θέτουμε $Y(t)$ τέτοια ώστε

$$dY(t) = [\sigma^*(t, T + \delta) - \sigma^*(t, T)] d\tilde{W}(t) + \frac{1}{2} [\sigma^*(t, T + \delta)^2 - \sigma^*(t, T)^2] dt$$

η οποία είναι διαδικασία Ito και συνάρτηση, $g(x) = \frac{B(0, T)}{\delta B(0, T + \delta)} e^x$ καταλήγουμε στη σχέση

$$dL(t, T) = (L(t, T) + \frac{1}{\delta}) [\sigma^*(t, T + \delta) - \sigma^*(t, T)] [\sigma^*(t, T + \delta) dt + d\tilde{W}(t)] \quad (4.45)$$

Από τον ορισμό της στοχαστικής διαδικασίας $\tilde{W}^{T+\delta}$, έχουμε ότι

$$d\tilde{W}^{T+\delta} = \sigma^*(t, T + \delta) dt + d\tilde{W}(t) \quad (4.46)$$

Συνεπώς, η (4.45) γίνεται

$$dL(t, T) = \frac{1}{\delta}(1 + \delta L(t, T))[\sigma^*(t, T + \delta) - \sigma^*(t, T)] d\tilde{W}^{T+\delta}(t) \quad (4.47)$$

Συγκρίνοντας τις (4.39), (4.47) καταλήγουμε σε μια σχέση η οποία συνδέει τα $\gamma(t, T)$ και $\sigma^*(t, T + \delta), \sigma^*(t, T)$

$$\gamma(t, T) = \frac{1 + \delta L(t, T)}{\delta L(t, T)}[\sigma^*(t, T + \delta) - \sigma^*(t, T)] \quad (4.48)$$

4.2.4 Determination of a full Term-Structure Model

Χρησιμοποιώντας την Black-Caplet formula, την οποία αναπτύξαμε σε προηγούμενη παράγραφο, μπορεί κανείς να κάνει calibration στο forward LIBOR model. Παρ' όλα αυτά, έτσι δεν μπορούν να προσδιοριστούν όλες οι παράμετροι που χρειάζονται για να έχουμε ένα πλήρες μοντέλο για toterm-structure των επιτοκίων. Σε αυτή την ενότητα, θα δούμε ότι το forward LIBOR model μπορεί να γίνει ένα πλήρες term-structure model. Αρχικά, θα χρησιμοποιήσουμε την Black-Caplet formula. Έστω, ότι τη στιγμή μηδέν, τα δεδομένα της αγοράς, μας επιτρέπουν να υπολογίσουμε τις τιμές για caplets με ημερομηνίες λήξης $T_j = j\delta, j = 1, \dots, n$, π.χ. αν $\delta = 3\text{-months}$, υπάρχουν δεδομένα ώστε να προσδιορίσουμε τις τιμές των caplets που λήγουν σε 3,6,...,3n μήνες από σήμερα. Μπορούμε, τότε, να προσδιορίσουμε τα volatilities $\bar{\gamma}(T_j), j = 1, \dots, n$. Αφού γίνει αυτό, θέλουμε να δημιουργήσουμε ένα term-structure model το οποίο να είναι συνεπές με τα δεδομένα αυτά.

Πρώτο βήμα, είναι να επιλέξουμε κατάλληλες μη-τυχαίες συναρτήσεις

$$\gamma(t, T_j), 0 \leq t \leq T_j \quad (4.49)$$

έτσι ώστε $\sqrt{\frac{1}{T_j} \int_0^{T_j} \gamma^2(t, T_j) dt} = \bar{\gamma}(T_j)$

Αφού υπολογίσουμε τα $\gamma(t, T_j)$, μπορούμε να αναπτύξουμε forward LIBORs γνωρίζοντας ότι ακολουθούν τη στοχαστική διαδικασία (4.39), βάζοντας όπου $T = T_j, j = 1, \dots, n$, και με αυτο τον τρόπο, οι τιμές των forward LIBORs, θα συμφωνουν με τις τιμές των cap, στην αγορά.

Πρέπει, πρώτα, να προσέξουμε, ότι για $T = T_j$ η σχέση (4.39), μας δίνει μια formula για το forward LIBOR $L(t, T_j)$, η οποία καθοδηγείται από μια κίνηση Brown \tilde{W}^{T_j+1} , η οποία είναι διαφορετική για κάθε j . Άρα, προτού προχωρήσουμε στην ανάπτυξη forward LIBORs από την (4.39), θα πρέπει πρώτα να καθορίσουμε μια σχέση μεταξύ αυτών των διαφορετικών εξισώσεων.

Ας θυμηθούμε ότι, εξ' ορισμού είναι

$$d\tilde{W}^{T_j}(t) = \sigma^*(t, T_j) dt + d\tilde{W}(t), 0 \leq t \leq T_j$$

Ομοίως, έχουμε ότι

$$d\tilde{W}^{T_{j+1}}(t) = \sigma^*(t, T_{j+1}) dt + d\tilde{W}(t), 0 \leq t \leq T_{j+1}$$

Αφαιρώντας την δεύτερη από την πρώτη, προκύπτει

$$d\tilde{W}^{T_j}(t) = [\sigma^*(t, T_j) - \sigma^*(t, T_{j+1})] dt + d\tilde{W}^{T_{j+1}}(t)$$

Άρα,

$$d\tilde{W}^{T_j} = -\frac{\delta\gamma(t, T_j)L(t, T_j)}{1 + \delta L(t, T_j)} dt + d\tilde{W}^{T_{j+1}}, 0 \leq t \leq T_{j+1} \quad (4.50)$$

Τότε, θέτοντας $j = n$, προκύπτει

$$d\tilde{W}^{T_n}(t) = -\frac{\delta\gamma(t, T_n)}{1 + \delta L(t, T_n)} dt + d\tilde{W}^{T_{n+1}}(t), 0 \leq t \leq T_n \quad (4.51)$$

Θέτοντας $j = n - 1$ στην σχέση (4.50) και χρησιμοποιώντας την (4.51) και συνεχίζοντας τη διαδικασία αυτή επαγωγικά, καταλήγουμε στη σχέση

$$d\tilde{W}^{T_{j+1}}(t) = -\sum_{i=j+1}^n \frac{\delta\gamma(t, T_i)L(t, T_i)}{1 + \delta L(t, T_i)} dt + d\tilde{W}^{T_{n+1}}(t), 0 \leq t \leq T_{j+1} \quad (4.52)$$

Καταφέραμε, με αυτόν τον τρόπο, να γράψουμε την στοχαστική διαφορική εξίσωση (4.39) η οποία περιγράφει την κίνηση του forward LIBOR ως

$$dL(t, T_j) = \gamma(t, T_j)L(t, T_j)\left[-\sum_{i=j+1}^n \frac{\delta\gamma(t, T_i)L(t, T_i)}{1 + \delta L(t, T_i)} dt + d\tilde{W}^{T_{n+1}}(t)\right] \quad (4.53)$$

$\forall 0 \leq t \leq T_j$ & $j = 1, \dots, n$ η οποία για κάθε j καθοδηγείται από μία κίνηση Brown, την $\tilde{W}^{T_{n+1}}(t)$. Κάθε forward LIBOR $l(t, T_j)$ μοντελοποιείται, σαν μια συνεχούς χρόνου στοχαστική διαδικασία, αλλά, τουλάχιστον καταφέραμε, να οδηγούνται όλες οι στοχαστικές διαδικασίες από την ίδια κίνηση Brown και να μπορούμε να κατασκευάσουμε την κάθε μία, ξεκινώντας από την διαδικασία $L(t, T_n)$ για λόγους τους οποίους θα δούμε παρακάτω.

Έτσι, για να κατασκευάσουμε το forward LIBOR model επιλέγουμε αρχικά μια κίνηση Brown $\tilde{W}^{T_{n+1}}(t)$, κάτω από το μέτρο πιθανότητας $\tilde{\mathbb{P}}^{T_{n+1}}$, δηλαδή, αρχίζουμε με ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \tilde{\mathbb{P}}^{T_{n+1}})$, στον οποίο ορίζεται μια κίνηση Brown $\tilde{W}^{T_{n+1}}(t), 0 \leq t \leq T_{n+1}$. Υποθέτουμε ότι η αρχική καμπύλη των forward LIBOR $L(0, T_j), j = 1, \dots, n + 1$, είναι γνωστή από τα δεδομένα της αγοράς. Με αυτές τις αρχικές συνθήκες, χρησιμοποιούμε την (4.53) και παράγουμε αρχικά τη διαδικασία $L(t, T_n)$ η οποία δεν εμφανίζει συντελεστή διολίσθησης. Κατόπιν, χρησιμοποιούμε την $L(t, T_n)$ στη διαφορική εξίσωση για την $L(t, T_{n-1})$ και παράγουμε αυτή τη διαδικασία, κ.ο.κ

Discounted Bond Prices

Προσπαθώντας, να αναπτύξουμε τη στοχαστική διαδικασία που περιγράφει την τιμή ενός zero-coupon bond $B(t, T_j)$ για κάθε $j = 1, \dots, n + 1$, η οποία να οδηγείται από μία κίνηση Brown για κάθε j , θα πρέπει πρώτα να προσδιορίσουμε τα volatilities $\sigma^*(t, T_j)$, $j = 1 \dots, n$. Είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο, ότι για κάθε j , τα forward LIBORs ακολουθούν διαφορετικές στοχαστικές διαδικασίες οι οποίες οδηγούνται από μια κοινή κίνηση Brown, , συνεπώς περιμένουμε να καταλήξουμε σε ένα αντίστοιχο συμπέρασμα, για τις τιμές των ομολόγων.

Όπως έχει γίνει αντιληπτό στη μέχρι τώρα ανάλυσή μας, παρ' όλο που το forward LIBOR model με tenor $\delta > 0$ θέτει κάποιους περιορισμούς, όσον αφορά την συνολική επίδραση των διαδικασιών, μεταξύ των στιγμών πληρωμής, T_j , δεν παρέχει καμία περαιτέρω πληροφορία η οποία να μας βοηθάει στον προσδιορισμό των volatilities $\sigma^*(t, T_j)$, $T_{j-q} \leq t < T_j$. Ο μόνος περιορισμός που μπορούμε να θέσουμε, είναι

$$\lim_{t \rightarrow T_j} \sigma^*(t, T_j) = \sigma^*(T_j, T_j) = 0 \quad (4.54)$$

Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε, ότι αυτός ο περιορισμός, έπεται από το γεγονός, ότι η τιμή ενός ομολόγου, όσο πλησιάζουμε προς τη λήξη, τείνει προς τη 1 (αφού πληρώνει μια μονάδα στη λήξη). Τότε, ο παράγοντας μεταβλητότητας για την τιμή του, θα τείνει στο μηδέν, όπως είναι λογικό. Ένας δεύτερος τρόπος για να δούμε από πού πηγάζει η (4.54) είναι αληθής, είναι αν θυμηθούμε τον ορισμό του $\sigma^*(t, T)$

$$\sigma^*(t, T) = \int_t^T \sigma(t, v) dv$$

Θα δείξουμε, λοιπόν, ότι χρησιμοποιώντας τη συνθήκη (4.54) για να επιλέξουμε τα $\sigma^*(t, T_j)$, $j = 1, \dots, n$ για $T_{j-1} \leq t < T_j$, μπορούμε να προσδιορίσουμε τα $\sigma(t, T_j)$, $\forall t \in [0, T_j]$ ¹⁰. Αρχικά, επιλέγοντας κατάλληλα τη συνάρτηση $\sigma^*(t, T_1)$ σύμφωνα με τον περιορισμό (4.54), καθορίζεται η $\sigma(t, T_1)$ για κάθε $0 \leq t < T_1$. Τότε, από την εξίσωση (4.48) προκύπτει ότι

$$\sigma^*(t, T_2) = \sigma^*(t, T_1) + \frac{\delta \gamma(t, T_1) L(t, T_1)}{1 + \delta L(t, T_1)}$$

Συνεπώς, αφού η $\sigma^*(t, T_1)$ έχει επιλεγεί στο προηγούμενο βήμα για $0 \leq t < T_1$, η $\sigma^*(t, T_2)$ ορίζεται με αυτή την εξίσωση για το διάστημα $0 \leq t < T_1$. Όμως, η $\sigma^*(t, T_2)$, για το διάστημα $T_1 \leq t < T_2$ έχει ήδη επιλεγεί,

¹⁰Θυμίζουμε ότι $\sigma(T_j, T_j) = 0$

λόγω της (4.54). Συνεπώς, η συνάρτηση, $\sigma^*(t, T_2)$, προσδιορίζεται για ολόκληρο το διάστημα $0 \leq t < T_2$, με συνέπεια να προσδιορίζεται και η $\sigma(t, T_2), \forall t \in [0, T_2)$. Συνεχίζοντας με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, προσδιορίζουμε τα $\sigma(t, T_j)$, για κάθε $j = 1, \dots, n+1$ και $0 \leq t < T_j$. Τώρα, αφού κατασκευάσαμε τα volatilities $\sigma^*(t, T_j)$, κάνοντας χρήση των σχέσεων (4.38) και (4.25), καταλήγουμε σε μια στοχαστική διαφορική εξίσωση, η οποία περιγράφει την κίνηση της τιμής του zero-coupon bond που πληρώνει 1 μονάδα στη λήξη T_j , $B(t, T_j)$, η οποία είναι η εξής

$$\begin{aligned} dB(t, T_j) &= R(t)B(t, T_j) dt - \sigma^*(t, T_j)B(t, T_j) d\tilde{W}(t) \\ &= B(t, T_j)[R(t) + \sigma^*(t, T_j)\sigma^*(t, T_{n+1})] dt - \sigma^*(t, T_j)B(t, T_j) d\tilde{W}^{T_{n+1}}(t) \end{aligned} \quad (4.55)$$

$\forall j = 1, \dots, n$.

Γράφοντας την (4.55) σε προεξοφλημένη μορφή, μιας και δεν έχουμε ορίσει τη διαδικασία για το επιτόκιο $R(t)$, προκύπτει

$$d(D(t)B(t, T_j)) = \sigma^*(t, T_j)\sigma^*(t, T_{n+1})D(t)B(t, T_j) dt - \sigma^*(t, T_j)D(t)B(t, T_j) d\tilde{W}^{T_{n+1}} \quad (4.56)$$

$\forall t \in [0, T_j]$ και $j = 1, \dots, n$.

Για να λυθεί η παραπάνω στοχαστική διαφορική εξίσωση, πρέπει να προσδιορίζουμε μια αρχική συνθήκη. Η αρχική συνθήκη, μπορεί να ληφθεί από την (4.30):

$$D(0)B(0, T_j) \underset{D(0)=1}{=} B(0, T_j) = \prod_{i=0}^{j-1} \frac{B(0, T_{i+1})}{B(0, T_i)} = \prod_{i=0}^{j-1} (1 + \delta L(0, T_i))^{-1} \quad (4.57)$$

Τότε, η λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης (4.56) είναι

$$D(t)B(t, T_j) = B(0, T_j) e^{-\int_0^t \sigma^*(u, T_j) d\tilde{W}^{T_{n+1}} - \int_0^t [\frac{1}{2}\sigma^*(u, T_j)^2 - \sigma^*(u, T_j)\sigma^*(u, T_{n+1})] du} \quad (4.58)$$

Αφού ορίσαμε και τη διαδικασία για την τιμή των zero-coupon bonds $B(t, T_j), \forall j = 1, \dots, n+1$ και $t \in [0, T_j]$ μπορούμε να συνεχίσουμε την ολοκλήρωση του μοντέλου για τον προσδιορισμό του term-structure βρίσκοντας το risk-neutral μέτρο πιθανότητας $\tilde{\mathbb{P}}$. Στην αρχή της ενότητας αυτής, είδαμε ότι ξεκινάμε με το forward-μέτρο πιθανότητας $\tilde{\mathbb{P}}^{T_{n+1}}$. Χρησιμοποιούμε την (4.37) για να ορίσουμε το risk-neutral μέτρο $\tilde{\mathbb{P}}$.

$$\tilde{\mathbb{P}} = \int_A \frac{B(0, T_{n+1})}{D(T_{n+1})} d\tilde{\mathbb{P}}^{T_{n+1}}, \forall A \in \mathcal{F} \quad (4.59)$$

¹¹Ουσιαστικά στην πρώτη ισότητα, γράφουμε το $B(0, T_j)$ ως γινόμενο κλασμάτων, των οποίων αριθμητές και παρονομαστές απαλοίφονται ανά δύο.

Θέτοντας στην (4.58) όπου $D(t)B(t, T_j)$, ίσο με $D(T_{n+1})B(T_{n+1}, T_{n+1})$ παίρνουμε ότι

$$D(T_{n+1}) = B(0, T_{n+1})e^{-\int_0^{T_{n+1}} \sigma^*(u, T_{n+1}) d\tilde{W}^{T_{n+1}}(u) + \frac{1}{2} \int_0^{T_{n+1}} \sigma^*(u, T_{n+1})^2 du}$$

Συνεπώς, ο όρος που βρίσκεται μέσα στο ολοκλήρωμα στη σχέση (4.59) ορίζεται ως εξής:

$$\frac{B(0, T_{n+1})}{D(T_{n+1})} = e^{-\int_0^{T_{n+1}} \sigma^*(u, T_{n+1}) d\tilde{W}^{T_{n+1}}(u) + \frac{1}{2} \int_0^{T_{n+1}} \sigma^*(u, T_{n+1})^2 du} \quad (4.60)$$

Για να δείξουμε ότι το μέτρο $\tilde{\mathbb{P}}$ είναι, πράγματι, risk-neutral μέτρο πιθανότητας, αρκεί να δείξουμε ότι η προεξοφλημένη τιμή του $D(t)B(t, T_j)$, είναι martingale κάτω από αυτό το μέτρο.

Theorem. Κάτω από το μέτρο πιθανότητας $\tilde{\mathbb{P}}$, το οποίο δίνεται από την (4.59), η προεξοφλημένες τιμές των ομολόγων, οι οποίες δίνονται από τη στοχαστική διαφορική εξίσωση (4.56) είναι martingales.

Αρ'οδείχ. Σύμφωνα με την (4.38), έχουμε ότι

$$\tilde{W}(t) = \tilde{W}^{T_{n+1}} - \int_0^t \sigma^*(u, T_{n+1}) du, 0 \leq t \leq T_{n+1}.$$

Τότε, η στοχαστική διαφορική εξίσωση (4.56) μπορεί να γραφεί

$$d(D(t)B(t, T_j)) = -\sigma^*(t, T_j)D(t)B(t, T_j) d\tilde{W}(t)$$

Συνεπώς, αρκεί να δείξουμε, ότι η $\tilde{W}(t)$ είναι κίνηση Brown κάτω από το μέτρο πιθανότητας $\tilde{\mathbb{P}}$.

Από το θεώρημα Girsanov, θέτοντας $\Theta(u) = -\sigma^*(u, T_{n+1})$ έχουμε ότι αν πάρουμε την

$$Z(T_{n+1}) = e^{-\int_0^{T_{n+1}} \Theta(u) d\tilde{W}^{T_{n+1}}(u) - \frac{1}{2} \int_0^{T_{n+1}} \Theta^2(u) du}$$

και κατασκευάσουμε το μέτρο πιθανότητας $\hat{\mathbb{P}}$, τέτοιο ώστε

$$\hat{P}(A) = \int_A Z(T_{n+1}) d\tilde{\mathbb{P}}^{T_{n+1}}, \forall A \in \mathcal{F}$$

η στοχαστική διαδικασία $\tilde{W}(t)$, που επάγεται από αυτό το μέτρο, είναι κίνηση Brown. Παρατηρούμε, ότι $Z(T_{n+1}) = \frac{B(0, T_{n+1})}{D(T_{n+1})} \Rightarrow \hat{\mathbb{P}} = \tilde{\mathbb{P}}$ \square
εξ' ορισμού

Άρα, η $\tilde{W}(t)$ είναι κίνηση Brown.

Bibliography

- Beata Stehlikova (2007) "Averaged Bond Prices for Fong-Vasicek and the generalized Vasicek Interest Rate Models"
- Beata Stehlikova "Mathematical Analysis of Term Structure Models", Dissertation Thesis (2008)
- F. Black, M. Scholes (1973): "The pricing of Options and Corporate Liabilities", The Journal of Political Economy, vol.81, Issue 3, pages 637-654
- F. Black, E. Derman, W. Toy (1990): "A One-Factor Model of Interest Rates and Its Application to Treasury Bond Options", Financial Analysts Journal, vol.46, no.1, pages 33-39
- Michael W. Brandt, David A. Chapman: "Affine Term Structure Models"
- K.C. Chan, G. Andrew Karolyi, Francis A. Longstaff, Anthony B. Sanders (1992): "An Empirical Comparison of Alternative Models of the Short-Term Interest Rate", The Journal of Finance, vol.47, no.3, pages 1209-1227
- John C. Cox, Jonathan E. Ingersoll, Stephen A. Ross (1985): "An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices", Econometrica, vol.52, no.2
- John C. Cox, Jonathan E. Ingersoll, Stephen A. Ross (1985b): "A Theory of the Term Structure of Interest Rates", Econometrica, vol.53, no.2, pages 385-408
- John C. Cox, Stephen A. Ross (1976): "The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes", The Journal of Financial Economics 3, pages 145-166
- David Heath, Robert Jarrow, Andrew Morton (1992): "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation", Econometrica, vol.60, no.1, pages 77-105
- Thomas S.Y. Ho, and Sang-Bin Lee (1986): "Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims", The Journal of Finance, vol.41, no.5

- John C. Hull: "Options, Futures, and Other Derivatives", Prentice Hall, 8th Edition
- John Hull, Alan White (1990): "Pricing Interest-Rate-Derivative Securities", University of Toronto, The Review of Financial Studies, vol.3, no.4
- John Hull, Allan White (1993): "One-Factor Interest-Rate Models and the Valuation of Interest-Rate Derivative Securities", The Journal of Financial and Quantitative Analysis, vol.28, no.2, pages 235-254
- Fashid Jamshidian (1989): "An Exact Bond Option Formula", The Journal of Finance, vol.44, no.1, pages 205-209
- Christoph Klose, Li Chang Yuan: "Implementation of the Black, Derman and Toy Model", Seminar in Financial Engineering, University of Vienna, Summer Term 2003
- Kristian R. Miltersen (1994): "An Arbitrage Theory of the Term-Structure of Interest Rates", Odense Universitet, Paper
- L.C.G. Rogers (1995): "Which Model of Term-Structure of Interest Rates Should One Use", Mathematical Finance, vol.65, pages 93-116, Springer, New York
- Francis A. Longstaff (1990): "Pricing Options With Extendible Maturities: Analysis and Applications", The Journal of Finance, vol.45, no.3, pages 935-957
- Martin Haugh (2010): "Continuous-Time Short-Rate Models", Notes
- Kristian R. Miltersen, Klaus Sandmann, Dieter Sondermann (1997): "Closed Form Solutions for Term-Structure Derivatives with Log-Normal Interest Rates", The Journal of Finance, vol.52, no.1, pages 409-430
- Richard J. Rendleman, Jr. and Brit J. Bartter (1980): "The Pricing of Options on Debt Securities", The Journal of Financial and Quantitative Analysis, vol.15, no.1, pages 11-24
- Scott F. Richard (1978): "An Arbitrage Model of the Term-Structure of Interest Rates", Journal of Financial Economics, vol.6, no.1
- SHIU, Ellias S.W. and YAO, Yong: "Closed-Form Formulas for Generalised Cox, Ingersoll, Ross Models"

- Steven E. Shreve: "Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models", Springer Finance
- Oldrich Vasicek (1977): "An Equilibrium Characterization of the Term Structure", Journal of Financial Economics 5, pages 177-188